**ПОЛИТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО,**
состоящее при ИМПЕРАТОРСКОМЪ Техническомъ Училищѣ.

# СТРОПИЛА.

Изысканіе раціональныхъ типовъ прямолинейныхъ стропильныхъ фермъ и

## ТЕОРІЯ АРОЧНЫХЪ ФЕРМЪ.

Дѣйствительнаго члена Политехническаго Общества,
инженеръ-механика
**В. Г. Шухова.**

**МОСКВА.**
Высочайше утвержд. „Русское Т-во печатн. и изд. дѣла". Чистые пруды, соб. д.
**1897.**

Печатано по распоряженію Совѣта Политехническаго О-ва.

Вице-предсѣдатель О-ва профессоръ *Н. Худяковъ.*

## Отъ вице-предсѣдателя Политехническаго Общества.

Зданія Всероссійской художественно-промышленной выставки 1896 года въ Н.-Новгородѣ не только представляли собою превосходные образцы художественнаго творчества русскихъ зодчихъ, но и свидѣтельствовали о высокомъ состояніи у насъ въ Россіи научной и практической стороны строительнаго искусства.

Наблюдателя поражали какъ легкія арочныя стропила, которыя перекрывали главное зданіе машиннаго отдѣла и были исполнены *С.-Петербургскимъ металлическимъ заводомъ*, такъ и оригинальныя по новизнѣ формы и легкости конструкціи арочныя и висячія сѣтчатыя покрытія системы Шухова, которыя были впервые введены въ практику строительнаго дѣла и представлены въ цѣломъ рядѣ зданій выставки строительной конторой инженера А. В. Бари.

Сѣтчатыя покрытія Шухова обращали на себя особенное вниманіе потому, что съ одинаковою легкостью и удобствомъ они находили себѣ примѣненіе при самыхъ разнообразныхъ формахъ зданія въ планѣ и при самыхъ разнообразныхъ пролетахъ; они были собраны изъ угол-ковъ и желѣза-зетъ, изъ полосъ съ такими поперечными сѣченіями и на такихъ взаимныхъ разстояніяхъ, какія мы привыкли встрѣчать только въ обрѣшетинахъ обыкновенныхъ стропилъ. Такая сѣтчатая поверхность, состоящая, такъ сказать, изъ одной обрѣшетины, не опиралась на какія-либо стропильныя фермы, а покоилась непосредственно на стѣнахъ и колоннахъ зданій, отчего многіе и называли эти покрытія Шухова *крышами безъ стропилъ*.

Описанію этихъ оригинальныхъ сѣтчатыхъ покрытій мы посвятили въ свое время небольшую статью, помѣщенную въ журналѣ *„Техническій Сборникъ и Вѣстникъ Промышленности“* (1896 г., № 5) подъ заглавіемъ *„Новые типы металлическихъ и деревянныхъ покрытій для зданій по системѣ инженера Шухова“*.

Культура какой-либо отрасли промышленной дѣятельности должна измѣряться однако не случайной новизной выставочныхъ экспонатовъ, а общимъ состояніемъ разсматриваемой дѣятельности и сознательнымъ отношеніемъ дѣятелей въ работѣ ихъ на томъ пути, который привелъ ихъ къ даннымъ нововведеніямъ.

Конструкція сѣтчатыхъ покрытій была удачно создана и закончена, оригинальность ихъ открыто признавалась всѣми, и преимущества ея въ смыслѣ малаго вѣса, необычной легкости изготовленія и дешевизны были провѣрены опытнымъ путемъ на цѣломъ рядѣ примѣровъ при самыхъ разнообразныхъ условіяхъ въ заданіи. Но этимъ закончиться дѣло не могло.

Интересъ, возбужденный сѣтчатыми покрытіями и съ практической и съ теоретической стороны, оказался настолько значительнымъ, что явилась настоятельная потребность имѣть сознательное отношеніе къ этому вопросу не только одному даровитому конструктору, создавшему систему сѣтчатыхъ покрытій безъ стропилъ, но и потребителямъ ихъ, и цѣлой плеядѣ инженеровъ, имѣющихъ прямое и непосредственное отношеніе къ строительному дѣлу.

Въ силу этого, какъ профессоръ Императорскаго Техническаго Училища и какъ вице-предсѣдатель Политехническаго Общества, призванный стоять на стражѣ интересовъ науки и ея практическихъ примѣненій, въ данномъ случаѣ я счелъ своимъ долгомъ обратиться къ инженеру А. В. Бари, почетному члену Политехническаго Общества, съ просьбою—разрѣшить Обществу опубликованіе тѣхъ трудовъ нашего уважаемаго сочлена В. Г. Шухова, которые имѣютъ непосредственное отношеніе къ созданной имъ системѣ сѣтчатыхъ покрытій, явившихся у него результатомъ самостоятельнаго анализа стропильныхъ фермъ.

А. В. Бари и В. Г. Шуховъ отнеслись къ этой моей просьбѣ съ полнымъ вниманіемъ и сочувствіемъ. Весь нужный для этого матеріалъ приведенъ былъ В. Г. Шуховымъ въ порядокъ и переданъ мнѣ для общаго редактированія и напечатанія въ трудахъ Политехническаго Общества, для которыхъ эта интересная и цѣнная работа, безспорно, является лучшимъ украшеніемъ.

**П. Худяковъ.**

12. I. 97.

## ОТЪ АВТОРА.

При составленіи проекта стропилъ первымъ и самымъ важнымъ вопросомъ является вопросъ о выборѣ той или другой системы фермъ, о выборѣ числа ея узловъ или панелей, о расположеніи прогоновъ и, наконецъ, о выборѣ разстоянія между фермами.

Употребленіе графическаго способа разсчета значительно упрощаетъ, можно сказать, дѣлаетъ почти автоматическимъ самый процессъ разсчета усилій въ разныхъ частяхъ фермы, но при этомъ у проектирующаго сооруженіе не получается отвѣта на вопросъ о наивыгоднѣйшемъ расположеніи связей фермъ и деталей крыши, и составителю проекта не дается возможности слѣдить за измѣненіемъ вѣса каждой отдѣльной части фермы въ зависимости отъ ея системы и геометрическаго положенія отдѣльныхъ ея частей.

Въ нижеслѣдующемъ предложенъ выработанный мною аналитическій разсчетъ стропильныхъ фермъ, который даетъ отвѣтъ на вопросы *объ опредѣленіи усилій*, воспринимаемыхъ на себя различными частями фермы, *объ опредѣленіи вѣса* этихъ частей и *о назначеніи въ проектѣ наивыгоднѣйшаго геометрическаго расположенія всѣхъ частей фермы*, при которомъ вѣсъ употребленнаго на устройство фермы матеріала былъ бы наименьшій.

Всестороннее рѣшеніе такой задачи представляетъ большія трудности, благодаря крайнему разнообразію системъ стропильныхъ фермъ, причемъ это разнообразіе обусловливается не только архитектурными требованіями и коструктивными особенностями, вытекающими изъ свойствъ строительнаго матеріала фермъ, но и побочными соображеніями конструктора, вносящаго личный художественный вкусъ въ расположеніе элементовъ проектируемыхъ имъ стропилъ. Поэтому здѣсь мы дѣлаемъ попытку разрѣшенія поставленной выше основной задачи въ примѣненіи ея только къ наиболѣе употребительнымъ въ практикѣ системамъ стропилъ — съ прямолинейнымъ и криволинейнымъ внѣшнимъ абрисомъ кровли, опирающейся на стѣны прямоугольнаго въ планѣ зданія.

Трудъ редактированія этой работы любезно принялъ на себя вице-предсѣдатель Политехническаго Общества проф. П. К. Худяковъ.

**Вл. Шуховъ.**

# Форма стропилъ.

Каждая стропильная ферма можетъ быть разсматриваема, какъ простая треугольная, состоящая изъ двухъ симметрично расположенныхъ наклонныхъ ногъ, прямыхъ или криволинейно изогнутыхъ въ одной плоскости; верхніе концы этихъ ногъ связаны шарниромъ и образуютъ конекъ крыши, а нижніе опираются на стѣны и соединяются между собою затяжкой для уничтоженія распора стѣнъ.

Будетъ-ли ферма прямая (фиг. 1) или криволинейная (фиг. 2), мы представимъ ее себѣ нагруженной равномѣрно.

Пусть обозначаютъ:

$q$ — равномѣрную нагрузку на ферму, отнесенную къ погонной единицѣ длины горизонтальной проекціи фермы,

$V_1$ и $V_2$ — давленія отъ фермы на опоры,

$H$ — усиліе горизонтальнаго распора или натяженіе затяжки у фермы,

$x$ — $y$ — координаты произвольнаго сѣченія фермы,

$M$ — сгибающій моментъ въ произвольномъ сѣченіи фермы,

$2l$ — длина фермы и

$f$ — высота или подъемъ фермы.

**Въ случаѣ равномѣрнаго распредѣленія нагрузки** находимъ:

Давленія на опоры

$$V_1 = V_2 = q\,.\,l.$$

Моменты всѣхъ силъ справа или слѣва отъ средняго сѣченія $C$ фермы даютъ:

$$H\,.\,f = ql\,.\,l - ql\,.\,\frac{l}{2},$$

откуда

$$H = q\cdot\frac{l^2}{2f}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\mathbf{1}.$$

Въ произвольномъ сѣченіи фермы сгибающій моментъ будетъ писаться такъ:

$$M = ql \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} - H \cdot y \quad \dots\dots\dots \mathbf{2}.$$

Въ случаѣ прямыхъ ногъ имѣемъ

$$y = x \cdot \frac{f}{l}$$

и тогда

$$M = q \cdot \frac{x(l - x)}{2} \quad \dots\dots\dots \mathbf{3},$$

т. е. въ случаѣ прямыхъ ногъ у стропильной фермы сгибающій моментъ въ произвольномъ ея сѣченіи выражается такъ же, какъ и у прямой балки длиною $l$.

При $x = \frac{l}{2}$ получимъ наибольшее значеніе сгибающаго момента. Оно будетъ

$$max.\ M = q \cdot \frac{l^2}{8} \quad \dots\dots\dots \mathbf{4}.$$

На устройство фермы пойдетъ наименьшее количество матеріала въ томъ случаѣ, когда $M = 0$. На основаніи этого изъ формулы **2** получимъ:

$$y = f \cdot \frac{2lx - x^2}{l^2} \quad \dots\dots\dots \mathbf{5}.$$

Это есть ур-іе параболы, вершина которой лежитъ въ точкѣ $C$ (фиг. 2). Отсюда слѣдуетъ, что:

1) *параболическая ферма есть наивыгоднѣйшая въ случаѣ равномѣрной нагрузки,*

2) *условію $M = 0$ при равномѣрномъ нагруженіи фермы удовлетворяетъ только параболическая форма ея.*

**Въ случаѣ односторонней нагрузки**, равномѣрно распредѣленной отъ одной изъ опоръ до вершины, напр. отъ $A$ до $C$ (фиг. 1 и 2), обозначимъ чрезъ $p$ нагрузку на погонную единицу длины горизонтальной проекціи полуфермы.

Вся нагрузка на ферму будетъ $p \cdot l$.

Давленія на опоры получаются такъ

$$V_1 = \frac{3}{4} \cdot p \,.\, l$$

$$V_2 = \frac{1}{4} \cdot p \,.\, l.$$

Взявши моментъ всѣхъ силъ, дѣйствующихъ на ферму справа или слѣва отъ точки $C$, найдемъ:
слѣва

$$\frac{3}{4} \cdot pl \,.\, l - pl \,.\, \frac{l}{2} = H \,.\, f,$$

а справа

$$\frac{1}{4} \cdot pl \,.\, l = H \,.\, f.$$

Оба эти равенства даютъ

$$H = \frac{1}{4} p \,.\, \frac{l^2}{f} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{6.}$$

Въ произвольномъ сѣченіи лѣвой нагруженной части фермы сгибающій моментъ будетъ писаться такъ:

$$M = \frac{3}{4} pl \,.\, x - p \,.\, \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} p \,.\, \frac{l^2}{f} \,.\, y \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{7.}$$

Въ случаѣ прямыхъ ногъ имѣемъ

$$y = x \,.\, \frac{f}{l},$$

и тогда

$$M = p \,.\, \frac{x(l-x)}{2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{8.}$$

Это ур-іе имѣетъ одинаковый видъ съ **3**.

При $x = \frac{l}{2}$ получимъ наибольшее значеніе сгибающаго момента. Оно будетъ

$$max.\, M = p \,.\, \frac{l^2}{8} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{9.}$$

Въ случаѣ односторонне нагруженной параболической фермы, удовлетворяющей условію, выражаемому формулой **5**, сгибающій моментъ назовемъ чрезъ $M_1$. Тогда изъ формулъ **5** и **7** получимъ:

$$M_1 = p \cdot \frac{x(l-x)}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{10}.$$

При $x = \frac{l}{2}$ получимъ наибольшее значеніе этого момента

$$max.\, M = p \cdot \frac{l^2}{16} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{11}.$$

Въ произвольномъ сѣченіи ненагруженной части фермы, координаты котораго $x_1$ и $y$, причемъ

$$x_1 = 2l - x,$$

сгибающій моментъ *для прямой фермы* будетъ:

$$M = V_2 \cdot x_1 - H \cdot y, \text{ или}$$

$$M = \frac{1}{4} \cdot pl \cdot x_1 - \frac{1}{4} \cdot p \cdot \frac{l^2}{f} \cdot x_1 \cdot \frac{f}{l} = 0$$

для всѣхъ точекъ отъ $B$ до $C$ (фиг. 1). Но такъ какъ стропильная ферма попеременно и съ правой и съ лѣвой стороны можетъ подвергаться односторонней нагрузкѣ, поэтому обѣ ея половины должны быть разсчитаны по моменту, наибольшее значеніе котораго дано въ формулѣ **9**.

*Для параболической фермы*, удовлетворяющей условію, выраженному формулой **5**, при одностороннемъ нагруженіи фермы сгибающій моментъ въ произвольномъ сѣченіи ненагруженной части фермы будетъ

$$M_1 = V_2 \cdot (2l - x) - \frac{1}{4} \cdot p \cdot \frac{l^2}{f} \cdot (2lx - x^2) \cdot \frac{f}{l^2},$$

или

$$M_1 = \frac{1}{4} p(2l - x) \cdot (l - x) \quad \ldots\ldots\ldots \mathbf{12}.$$

Наибольшее значеніе этого момента получится при $x = \frac{3}{2}\, l$. Оно будетъ

$$max.\, M_1 = -\, p \cdot \frac{l^2}{16} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{13}.$$

Слѣдовательно, обѣ стороны параболической фермы должны быть разсчитаны по сгибающему моменту, наибольшее значеніе котораго равно

$$p \cdot \frac{l^2}{16}.$$

Разсмотрѣніе формулъ **4**, **9**, **11** и **13** приводитъ насъ къ слѣдующимъ заключеніямъ:

1) *Выраженіе наибольшаго сгибающаго момента, какъ для прямой фермы, такъ и для параболической, не зависитъ отъ величины ихъ подъема f.*

2) *При односторонней нагрузкѣ на ферму разсчетный сгибающій моментъ для параболической фермы вдвое менѣе, чѣмъ для прямой фермы.*

Въ случаѣ односторонней нагрузки на ферму, не существуетъ такого вида кривой, при которомъ бы можно было имѣть $M = 0$.

Въ самомъ дѣлѣ, если приравняемъ нулю общее выраженіе сгибающаго момента (см. форм. **7**) при односторонней нагрузкѣ, то получимъ:

$$y = \frac{f \, . \, (3l - 2x)}{l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{14.}$$

Это есть ур-іе параболы, вершина которой однако не совпадаетъ съ вершиною параболы, представляемой ур-іемъ **5**. Если ферма будетъ имѣть видъ параболы, отвѣчающей ур-ію **14**, то моменты для точекъ нагруженной стороны фермы будутъ равны нулю, но зато ненагруженная сторона этой фермы будетъ давать отрицательные моменты, абсолютная величина которыхъ больше, чѣмъ для параболы, построенной по ур-ію **5**; наибольшее значеніе сгибающаго момента для этой новой фермы получится при $x_1 = \frac{l}{2}$ (при началѣ координатъ въ точкѣ $B$ на фиг. 2), и оно будетъ *вдвое болѣе*, чѣмъ для параболы, представляемой ур-іемъ 5.

Путемъ подобныхъ же выкладокъ и разсужденій не трудно доказать, что *всякое отклоненіе отъ параболической фермы, представляемой ур-іемъ* **5**, *съ цѣлію уменьшенія сгибающихъ моментовъ нагруженной стороны, непремѣнно вызоветъ увеличеніе сгибающихъ моментовъ ненагруженной стороны фермы, и наоборотъ.*

Слѣдовательно, *для односторонней равномѣрной нагрузки параболическая форма стропилъ есть наивыгоднѣйшая.*

Назовемъ чрезъ $S$ — сжимающее усиліе въ произвольномъ сѣченіи фермы, координаты котораго $x$ и $y$. При равномѣрной нагрузкѣ $q$ по всей длинѣ будемъ имѣть (см. фиг. 1).

$$S = H \, . \, Cos\, \alpha + (V_1 - q \, . \, x) \, . \, Sin\, \alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{15.}$$

У опоры, гдѣ $x = 0$, сжимающее усиліе будетъ

$$H \, . \, Cos\, \alpha + V_1 \, . \, Sin\, \alpha.$$

Въ вершинѣ фермы, гдѣ $x=l$, сжимающее усиліе будетъ

$$H \cdot Cos\, \alpha.$$

Наконецъ, въ сѣченіи наибольшаго сгибающаго момента, т.-е. при $x=\frac{l}{2}$, сжимающее усиліе будетъ

$$H \cdot Cos\, \alpha + q \cdot \frac{l}{2} \cdot Sin\, \alpha.$$

Во всѣхъ точкахъ прямой фермы будемъ имѣть

$$tg\, \alpha = f : l.$$

Для параболы же, удовлетворяющей ур-ію 5, получится

$$tg\, \alpha = \frac{dy}{dx} = 2f \cdot \frac{l-x}{l^2}$$

и въ сѣченіи наибольшаго сгибающаго момента, т.-е. при $x=\frac{l}{2}$, и здѣсь также получимъ

$$tg\, \alpha = f : l.$$

Слѣдовательно, *въ сѣченіи наибольшаго момента сжимающее усиліе одинаково, какъ въ прямой, такъ и въ параболической фермахъ.*

Такимъ образомъ, сравненіе фермъ прямыхъ и криволинейныхъ показываетъ, что *ферма, испытывающая наименьшее напряженіе матеріала, должна при равномѣрной нагрузкѣ имѣть форму параболы.* А потому, если конструктору предоставленъ свободный выборъ поверхности крыши, то для полученія наименьшаго вѣса стропилъ слѣдуетъ остановиться на фермахъ параболическихъ, и отыскивать какой-либо другой видъ фермъ меньшаго вѣса въ такихъ случаяхъ безполезно.

Разсмотрѣнныя выше простыя треугольныя фермы могутъ быть сдѣланы или изъ сплошныхъ балокъ постояннаго и перемѣннаго сѣченій, или же, съ цѣлію увеличенія момента сопротивленія, имъ придается опредѣленная система раскосовъ.

Сплошныя балки могутъ быть употреблены для небольшихъ пролетовъ, въ случаѣ прямой фермы—не болѣе 4—5 *mt.*, а для арочныхъ фермъ—не болѣе 10—12 *mt.* При дальнѣйшемъ увеличеніи пролетовъ необходимо употреблять раскосныя фермы.

При сплошныхъ балкахъ, по найденнымъ разсчетнымъ величинамъ $M$ и $S$ и при выбранномъ допускаемомъ напряженіи матеріала, опредѣляется *модуль сопротивленія*, по которому и отыскивается соотвѣтственный профиль желѣза въ имѣющихся таблицахъ. Двутавровая форма профиля является въ этомъ случаѣ наиболѣе выгодною. Вообще же нужно выбирать такое сѣченіе, которое при данномъ модулѣ даетъ наименьшій вѣсъ.

При разсчетѣ на сжатіе надо вводить поправку отъ длины сжимаемыхъ частей.

Въ отношеніи выбора желѣза для ногъ, подверженныхъ сгибанію и сжатію, изданныя Бѣлелюбскимъ и Богуславскимъ таблицы даютъ полный матеріалъ для проектированія, и останавливаться на примѣрахъ этого разсчета здѣсь мы считаемъ излишнимъ.

# Прямолинейныя раскосныя стропильныя фермы.

## Подраздѣленіе фермъ.

Раскосныя стропильныя фермы съ прямыми ногами могутъ быть подраздѣлены на 2 класса:

**Фермы 1-го класса** имѣютъ подъ каждой ногой тяги и раскосы, длина которыхъ увеличивается по мѣрѣ удаленія отъ опоръ къ коньку. Примѣрами такихъ фермъ могутъ служить англійскія и американскія фермы, изображенныя на фиг. 3, 4 и 5.

**Фермы 2-го класса** имѣютъ тяги и раскосы, симметрично расположенные относительно средины ноги. Примѣромъ такихъ фермъ можетъ служить ферма *Полонсо* (фиг. 6).

# Фермы 1-го класса.

## Опредѣленіе усилій, передающихся на раскосы и тяги въ $m$—ой панели.

Пусть обозначаютъ:

$2l$ — пролетъ раскосной фермы 1-го класса,

$2n$ — число ея панелей,

$q$ — равномѣрно распредѣленная нагрузка, приходящаяся на погонную единицу длины въ горизонтальной проекціи фермы.

Тогда на каждый верхній узелъ фермы будетъ передаваться грузъ.

$$\Theta = q \cdot \frac{l}{n}.$$

Нагрузка можетъ быть передаваема на ферму двояко:

1) нагрузка можетъ лежать непосредственно на верхнемъ поясѣ фермы; тогда части пояса, расположенныя между узлами, будутъ испытывать сгибаніе отъ лежащей на нихъ нагрузки; въ этомъ случаѣ обрѣшетина находится непосредственно на верхнемъ поясѣ фермы;

2) нагрузка передается въ узлахъ фермы посредствомъ прогоновъ, на которыхъ покоится обрѣшетина *).

Въ дальнѣйшихъ выводахъ мы будемъ предполагать существованіе 1-го способа передачи нагрузки, т. е. непосредственное распредѣленіе на верхнемъ поясѣ фермы.

Давленіе на опоры будетъ

$$V_1 = V_2 = q \cdot l.$$

Пусть обозначаютъ:

$c_1\ c_2\ c_3 \ldots\ldots c_{n-1}$ — длины раскосовъ,

$u_1\ u_2\ u_3 \ldots\ldots u_{n-1}$ — сжимающія усилія въ раскосахъ,

$x_1\ x_2\ x_3 \ldots\ldots x_{n-1}$ — проекціи длинъ раскосовъ на горизонталь,

$h_1\ h_2\ h_3 \ldots\ldots h_{n-1}$ и $h_n$ — разстояніе отъ верхнихъ узловъ фермы до оси затяжки, гдѣ $h_n = f$ — подъемъ крыши,

$d_1\ d_2\ d_3 \ldots\ldots d_{n-1}$ — длины тягъ,

$t_1\ t_2\ t_3 \ldots\ldots t_{n-1}$ — усилія растяженія въ тягахъ,

$S_0\ S_1\ S_2 S_3 \ldots\ldots S_{n-1}$ — усилія сжатія въ частяхъ верхняго пояса.

$T_0 T_1\ T_2 \ldots\ldots T_{n-1}$ — усилія растяженія въ частяхъ нижняго пояса.

Длина пояса сжатія будетъ

$$s = \sqrt{f^2 + l^2}$$

Введемъ обозначенія

$$\frac{s}{n} = b \quad \text{и}$$

$$\frac{l}{n} = a$$

Тогда $$b : a = s : l.$$

Изъ всей фермы выдѣлимъ $m$-ную панель (фиг. 7), ограниченную частью пояса сжатія съ усиліемъ $S_m$, пояса растяженія съ усиліемъ $T_m$, раскоcами $c_m$ и $c_{m+1}$ и имѣющую тягу $d_m$.

Если $m$-ый узелъ, т.-е. точка $e$ (фиг. 7), отстоитъ отъ опоры фермы на разстояніе $g$, гдѣ

$$g = m \cdot \frac{l}{n},$$

*) Въ этомъ случаѣ ферма воспринимаетъ на себя въ узлахъ сосредоточенные грузы, а прогоны испытываютъ на себѣ изгибающее дѣйствіе нагрузки.

тогда моментъ внѣшнихъ силъ для узла $e$ напишется такъ:

$$M_m = V_1 \cdot g - q \cdot \frac{g^2}{2},$$

или

$$M_m = q \cdot l^2 \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{2n-m}{2n} \quad \dots\dots\dots \quad \mathbf{16.}$$

Натяженіе $(m-1)$-ой части нижняго пояса будетъ опредѣляться равенствомъ

$$T_{m-1} \cdot h_m = M_m,$$

но

$$h_m = f \cdot \frac{m}{n},$$

слѣдовательно

$$T_{m-1} = q \cdot \frac{l^2}{f} \cdot \frac{2n-m}{2n} \quad \dots\dots\dots \quad \mathbf{16,a.}$$

Такимъ же образомъ изъ ур-ія моментовъ внѣшнихъ силъ относительно $(m+1)$-го узла, т.-е. точки $f$ (фиг. 7), будемъ имѣть:

$$T_m = q \cdot \frac{l^2}{f} \cdot \frac{2n-m-1}{2n} \quad \dots\dots\dots \quad \mathbf{17.}$$

Для панели 0 (фиг. 3, 4 и 5), гдѣ $m=0$, усиліе въ нижнемъ поясѣ будетъ

$$T_0 = q \cdot \frac{l^2}{f} \cdot \frac{2n-1}{2n} \quad \dots\dots\dots \quad \mathbf{17,a.}$$

Для равновѣсія усилій, дѣйствующихъ на узелъ $e_1$ (фиг. 7), необходимо, чтобы алгебраическая сумма проекцій ихъ на горизонталь равнялась нулю; слѣдовательно, разность натяженій

$$T_{m-1} - T_m = q \cdot \frac{l^2}{2n \cdot f}$$

должна равняться суммѣ горизонтальныхъ проекцій усилій растяженія $t_m$ тяги $d_m$ и сжатія $u_m$ раскоса $c_m$, т.-е.

$$t_m \cdot Cos\,\gamma + u_m \cdot Cos\,\beta = q \cdot \frac{l^2}{2n \cdot f} \quad \dots\dots\dots \quad \mathbf{18.}$$

Изъ чертежа (фиг. 7) видно, что

$$u_m \cdot Cos\,\beta : t_m \cdot Cos\,\gamma = x_m : e_1\,e_2$$

$$e_1\,e_2 : e_1\,e_3 = h_m : h_{m+1} = m : (m+1)$$

$$e_1\,e_3 = a - x_m.$$

Слѣдовательно

$$u_m \,.\, Cos\,\beta : t_m \,.\, Cos\,\gamma = x_m \,.\, (m+1) : m(a - x_m) \quad . \; . \; . \; . \; \mathbf{19.}$$

Рѣшая ур-iя **18** и **19**, получимъ:

$$u_m \,.\, Cos\,\beta = \frac{q\,.\,l^2}{2n\,.\,f} \cdot \frac{(m+1)\,.\,x_m}{m\,.\,a + x_m}$$

$$t_m \,.\, Cos\,\gamma = \frac{q\,.\,l^2}{2n\,.\,f} \cdot \frac{m(a - x_m)}{m\,.\,a + x_m}$$

Но

$$Cos\,\beta = x_m : c_m$$

$$Cos\,\gamma = (a - x_m) : d_m.$$

слѣдовательно, усилiе сжатiя въ произвольномъ раскосѣ будетъ вычисляться по формулѣ:

$$u_m = \frac{ql^2}{2n\,.\,f} \,.\, (m+1) \,.\, \frac{c_m}{m\,.\,a + x_m} \quad . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{20.}$$

а для опредѣленiя усилiя растяженiя въ произвольной тягѣ получимъ формулу:

$$t_m = \frac{q\,.\,l^2}{2n\,.\,f} \,.\, m \,.\, \frac{d_m}{m\,.\,a + x_m} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{21.}$$

Опредѣлимъ теперь усилiе сжатiя въ верхнемъ поясѣ.

Горизонтальная слагающая усилiя $S_m$ сжатiя верхняго пояса равняется усилiю ($m$ — 1)-ой части нижняго пояса за вычетомъ горизонтальной слагающей $m$-го раскоса *); а само усилiе сжатiя будетъ равно горизонтальной его слагающей, умноженной на $s : l$; слѣдовательно

$$S_m = \frac{q\,.\,l\,.\,s}{2n\,.\,f}\left(2n - m - \frac{(m+1)\,.\,x_m}{m\,.\,a + x_m}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{22.}$$

Замѣтимъ, что для панели, имѣющей знакъ $O$, усилiе сжатiя не зависитъ отъ положенiя раскоса и будетъ опредѣляться по формулѣ (см. **17a**):

$$S_0 = \frac{q\,l\,s}{f} \cdot \frac{2n - 1}{2n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{22{,}a}$$

---

*) Помимо геометрической очевидности, въ этомъ можно убѣдиться также изъ разсмотрѣнiя моментовъ дѣйствующихъ внѣшнихъ силъ.

## Опредѣленіе вѣса $m$-ой панели.

При измѣненіи $x$ отъ $x=0$ до $x=a$ будутъ измѣняться и усилія и длина разсмотрѣнныхъ четырехъ частей панели фермы, и задача прямолинейныхъ фермъ стропилъ сводится въ дальнѣйшемъ къ опредѣленію такого значенія $x$, при которомъ сумма вѣсовъ этихъ четырехъ частей наименьшая.

Обозначимъ чрезъ

$k$ — коэффиціентъ прочнаго сопротивленія матеріала фермы при растяженіи,

$k_1$ — то же при сжатіи въ раскосахъ,

$k_2$ — то же при сжатіи въ поясахъ.

Если $P$ будетъ усиліе, растягивающее или сжимающее одну изъ частей фермы, то общее выраженіе для площади поперечнаго сѣченія растянутой части будетъ $P:k$, а для сжатой — $P:k_1$ или $P:k_2$.

Если $\lambda$ будетъ длина разсчитываемой части, а $\gamma$ — вѣсъ кубической единицы матеріала, то вѣса матеріала, входящаго въ составъ частей фермы, будутъ имѣть видъ одного изъ слѣдующихъ выраженій:

$$\frac{P}{k}\cdot\lambda\cdot\gamma, \text{ или } \frac{P}{k_1}\cdot\lambda\cdot\gamma, \text{ или } \frac{P}{k_2}\cdot\lambda\cdot\gamma.$$

Разбивая ферму на $2n$ равныхъ по длинѣ частей, опредѣлимъ вѣсъ, входящій въ составъ той части, которая лежитъ между перпендикулярами $h_m$ и $h_{m+1}$.

Пусть

$$\frac{k}{k_1}=\beta \qquad \bullet \quad \frac{k}{k_2}=\beta_1.$$

Вѣсъ раскоса будетъ

$$V_c=u_m\cdot c_m\cdot\frac{\beta\cdot\gamma}{k},$$

но

$$c_m^2=h_m^2+x_m^2,$$

слѣдовательно, пользуясь формулой **20**, получимъ для опредѣленія вѣса раскоса:

$$V_c=\frac{ql^2}{2nf}\cdot(m+1)\cdot\frac{h_m^2+x_m^2}{m\,.\,a+x_m}\cdot\frac{\beta\cdot\gamma}{k}.$$

Такимъ же путемъ вѣсъ тяги $d_m$ при помощи формулы **21** будетъ вычисляться такъ:

$$V_t=\frac{ql^2}{2nf}\,.\,m\,.\,\frac{h_{m+1}^2+(a-x_m)^2}{m\,.\,a+x_m}\cdot\frac{\gamma}{k}.$$

Вѣсъ $m$—ой части пояса сжатія будетъ (см. формулу **22**):

$$V_1 = \frac{qls}{2nf} \cdot b\left(2n - m - \frac{(m+1) \cdot x_m}{m \cdot a + x_m}\right) \frac{\beta_1 \cdot \gamma}{k}.$$

Поясъ растяженія съ длиною $x_m$ будетъ имѣть вѣсъ (см. формулу **16,a**):

$$\frac{ql^2}{2f} \cdot \frac{2n-m}{2n} \cdot x_m \cdot \frac{\gamma}{k},$$

а вѣсъ пояса растяженія съ длиною $e_1 e_3$ (фиг. 7) при помощи формулы **17** вычислится такъ:

$$\frac{ql^2}{f} \cdot \frac{2n-m-1}{2n} \cdot \frac{\gamma}{k}(a - x_m).$$

Соединяя два послѣдніе вѣса въ одно общее выраженіе, получимъ вѣсъ пояса растяженія между перпендикулярами $h_m$ и $h_{m+1}$, т. е. на длинѣ $a$. Это будетъ вѣсъ

$$V_2 = \frac{ql^2}{2nf}\left[(2n-m-1) \cdot \frac{a}{k} + \frac{x_m}{k}\right] \cdot \gamma$$

Полный вѣсъ $m$—ой панели, не принимая во вниманіе вѣса скрѣпленій въ узлахъ, можно написать теперь такъ:

$$Z = \frac{ql^2}{2nf} \cdot \frac{\gamma}{k}(A + B + C + D) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{23},$$

гдѣ $A$, $B$, $C$ и $D$—слагаемыя, вошедшія въ сумму при образованіи ея изъ перечисленныхъ и разсмотрѣнныхъ выше четырехъ ея частей:

$$A = \frac{h_m^2 + x_m^2}{m \cdot a + x_m}(m+1)\beta$$

$$B = \frac{h_{m+1}^2 + (a - x_m)^2}{m \cdot a + x_m} m$$

$$C = \frac{s}{l} \cdot b \cdot \beta_1 \left(2n - m - \frac{(m+1) x_m}{m \cdot a + x_m}\right)$$

$$D = (2n - m - 1) \cdot a + x_m.$$

## Опредѣленіе наивыгоднѣйшаго расположенія нижнихъ узловъ фермы.

При измѣненіи $x$ отъ $o$ до $a$, вѣсъ панели фермы будетъ измѣняться. Найдемъ условіе, которому должно удовлетворять расположеніе нижнихъ узловъ фермы при наименьшемъ ея вѣсѣ. Для полученія этого условія надо взять 1-ю производную отъ $Z$ по $x$ и приравнять ее нулю. Отбрасывая постоянныя величины, придется брать 1-ю производную отъ выраженія дроби, у которой знаменатель равенъ

$$m \cdot a + x,$$

а числитель пишется такъ:

$$m[h_{m+1}^2 + (a - x)^2] + \beta(m+1)(h_m^2 + x^2) -$$

$$- \frac{s}{l} \cdot b \cdot \beta_1 (m+1) x + x(m \cdot a + x).$$

Выраженіе 1-й производной, обращенной въ нуль, послѣ первыхъ преобразованій напишется такъ:

$$\frac{x^2}{m^2 \cdot a^2} - \frac{2x}{m \cdot a} + \frac{1 + \frac{1}{m} + \frac{h_{m+1}^2}{m \cdot a^2}}{(m+1)(\beta+1)} -$$

$$- \frac{\frac{\beta \cdot h_m^2}{m^2 \cdot a^2} + \frac{s}{l} \cdot \frac{b \cdot \beta_1}{a \cdot m}}{\beta + 1} = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{24}$$

Но $$b : a = s : l$$

$$\frac{h_{m+1}^2}{a^2} = (m+1)^2 \cdot \frac{h^2}{a^2 \cdot n^2} = \frac{h^2}{l^2}(m+1)^2$$

$$\frac{h_m^2}{a^2} = m^2 \cdot \frac{h^2}{l^2}$$

Вводя значеніе этихъ величинъ въ формулу **24**, получимъ,

$$\frac{x^2}{m^2 \cdot a^2} + \frac{2x}{m \cdot a} - \frac{h^2}{l^2} - \frac{1 + \beta_1}{m(1+\beta)} \cdot \left(\frac{h^2}{l^2} + 1\right) = 0,$$

откуда

$$\frac{x}{m \cdot a} = \sqrt{\left(1 + \frac{h^2}{l^2}\right)\left(1 + \frac{1}{m} \cdot \frac{1+\beta_1}{1+\beta}\right)} - 1,$$

или окончательно

$$x_m = m \cdot a \left[\frac{s}{l}\sqrt{1 + \frac{1}{m} \cdot \frac{1+\beta_1}{1+\beta}} - 1\right] \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{25}.$$

Это и есть искомое условіе. Но такъ какъ усилія въ раскосахъ растутъ съ возрастаніемъ ихъ длины, поэтому для упрощенія послѣдняго вывода можно было бы принять, что $\beta_1$ постоянно для всѣхъ раскосовъ сжатія и равно $\beta$. При этомъ допущеніи получимъ:

$$x_m = m \cdot a\left[\frac{s}{l}\sqrt{\frac{m+1}{m}} - 1\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{26.}$$

Ферму, удовлетворяющую условію **26**, будемъ называть *раціональной фермой*.

При существованіи условія **26** сравнимъ вѣсъ раціональной фермы съ вѣсомъ другихъ наиболѣе употребительныхъ типовъ фермъ, а именно съ вѣсомъ фермъ

съ вертикальными стойками (фиг. 4), гдѣ $x_m = 0$

съ вертикальными тягами (фиг. 5), гдѣ $x_m = a$

и съ вѣсомъ фермъ *Полонсо* при числѣ панелей, равномъ четнымъ степенямъ $2$.

## Фермы раціональныя.

$$x = m \cdot a\left[\frac{s}{l}\sqrt{\frac{m+1}{m}} - 1\right]$$

Введемъ обозначеніе:

$$\frac{q\, l^2}{2n\, f} = E\,.$$

Сводъ всѣхъ данныхъ для разсчета усилій въ этихъ фермахъ представляется въ такомъ видѣ:

Сжатіе раскосовъ

$$u_m = E \cdot (m+1)\,\frac{c_m}{m \cdot a + x_m}.$$

Натяженіе тягъ

$$t_m = E \cdot m \cdot \frac{d_m}{m \cdot a + x_m}.$$

Сжатіе верхняго пояса

$$S_m = E \cdot \frac{s}{l}\left[2n - m - \frac{(m+1) \cdot x_m}{m \cdot a + x_m}.\right]$$

Сжатіе верхняго пояса панели $o$

$$S_0 = E \cdot \frac{s}{l}(2n - 1).$$

Натяженіе нижняго пояса

$$T_m = E(2n - m - 1).$$

Напряженіе нижняго пояса панели $o$

$$T_0 = E(2n - 1).$$

Введемъ обозначенія

$$\frac{ql^2}{2nf} \cdot \frac{a\gamma}{k} = N$$

$$\frac{s}{l} = \frac{b}{a} = r.$$

Вѣсъ $m$-ой части нижняго пояса будетъ по предыдущему:

$$V_a = N\left(2n - 2m - 1 + m \cdot r\sqrt{\frac{m+1}{m}}\right).$$

*Вѣсъ всего нижняго пояса* получится, взявши сумму $n$ такихъ членовъ, въ которыхъ $m$ будетъ измѣняться отъ $o$ до $n - 1$. Эта сумма будетъ:

$$N \cdot r \sum_0^{n-1} \sqrt{m(m+1)} + N \cdot n^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{27.}$$

Вѣсъ $m$-ой части верхняго пояса по предыдущему будетъ:

$$V_s = N \cdot r^2 \quad \beta\left(2n - m - (m+1)\frac{r\sqrt{m(m+1)} - m}{r\sqrt{m(m+1)}}\right) =$$

$$= N \cdot r^2 . \beta\left(2n - m - (m+1) + \frac{1}{r}\sqrt{m(m+1)}\right).$$

*Вѣсъ всего пояса сжатія* получится, взявши сумму $n$ такихъ членовъ, въ которыхъ $m$ будетъ измѣняться отъ $o$ до $n - 1$. Эта сумма будетъ:

$$N . r . \beta \sum_0^{n-1} \sqrt{m(m+1)} + N . r^2 . n^2 . \beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{28.}$$

Вѣсъ раскоса по предыдущему найдемъ въ такомъ видѣ

$$V_c = N . \beta . \frac{m+1}{a} \cdot \frac{h_m^2 + x_m^2}{m . a + x_m} =$$

$$= N . \beta \left[ r(1 + 2m)\sqrt{m(m+1)} - 2m(m+1)\right].$$

*Вѣсъ всѣхъ раскосовъ* получится, взявши сумму $n-1$ такихъ членовъ, въ которыхъ $m$ будетъ измѣняться отъ 1 до $n-1$. Эта сумма будетъ:

$$N \cdot \beta \sum_1^{n-1} \left[ r(1+2m)\sqrt{m(m+1)} - 2m(m+1) \right]. \quad . \quad \mathbf{29.}$$

Совершенно подобнымъ же образомъ *вѣсъ всѣхъ* $n-1$ *тягъ* получится въ видѣ той же суммы, представляемой формулой **29**, только безъ коэффиціента $\beta$. Эта послѣдняя сумма, не написанная здѣсь, пусть имѣетъ текущій нумеръ **30**.

Часть вѣса $N \cdot n^2$ пояса растяженія и $N \cdot n^2 \cdot r^2$ пояса сжатія представляютъ собою ту величину вѣса, которую имѣла бы ферма безъ раскосовъ.

Въ самомъ дѣлѣ, какъ мы видѣли (см. форм. **1**), натяженіе тягъ, связывающихъ подошвы ногъ фермы безъ раскосовъ, равно $q\,l^2 : 2f$ длина тягъ — $a \cdot n$; слѣдовательно, вѣсъ матеріала затяжки будетъ

$$\frac{ql^2}{2f} \cdot \frac{n \cdot a}{k} \cdot \gamma = N \cdot n^2.$$

Нога у фермы безъ подкосовъ будетъ разсчитываться по силѣ сжатія $q \cdot l^2 \cdot r : 2f$, длина ноги $a \cdot n \cdot r$; слѣдовательно вѣсъ ея будетъ

$$N \cdot n^2 \cdot r^2 \cdot \beta.$$

При существованіи раскосовъ у фермы, въ поясахъ ея получается добавочный вѣсъ матеріала

$$N \cdot r \cdot \sum \sqrt{m(m+1)} \quad \text{и}$$

$$N \cdot r \cdot \beta \sum \sqrt{m(m+1)}.$$

Эти двѣ послѣднія величины отличаются одна отъ другой только коэффиціентомъ $\beta$, какъ и вѣса раскосовъ и тягъ (см. форм. **29** и **30**). Но такъ какъ $\beta$ выражаетъ собою отношеніе принятыхъ коэффиціентовъ прочнаго сопротивленія матеріала, слѣдовательно, отличительное свойство раціональныхъ фермъ заключается въ томъ, что въ нихъ

*сумма произведеній усилій на длину раскосовъ сжатія равна суммѣ произведеній усилій на длину тягъ растяженія;*

*такое же соотношеніе существуетъ и относительно добавочныхъ усилій поясовъ.*

Складывая предыдущія выраженія вѣсовъ отдѣльныхъ частей, не принимая во вниманіе вѣса скрѣпленій въ узлахъ, получимъ вѣсъ половины фермы въ слѣдующемъ видѣ:

$$V = 2N(1+\beta)\left[r\sum_1^{n-1}(m+1)\sqrt{m(m+1)} + \sum_1^{n-1} m(m+1)\right] + \\ + N.n^2(1+r^2.\beta) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{31.}$$

Съ точностію, достаточною для цѣлей практики, можно принять, что

$$\sum_1^{n-1}(m+1)\sqrt{m(m+1)} = \sum_1^{n-1}\left(m^2 + \frac{3}{2}m + \frac{1}{3}\right).$$

Тогда

$$V = 2N(1+\beta)\sum_1^{n-1}\left[(r-1)(m+m^2) + r\left(\frac{m}{2}+\frac{1}{3}\right)\right] + \\ + N.n^2(1+r^2.\beta) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{32.}$$

Произведя въ формулѣ **32** суммированіе, вмѣсто алгебраической суммы, имѣющей своимъ коэффиціентомъ $2N(1+\beta)$, получимъ слѣдующее выраженіе:

$$(n-1)\left[\frac{1}{3} + \frac{n}{4} + (r-1).n.\left(\frac{2n-1}{6} + \frac{1}{2}\right)\right].$$

Послѣ этого

$$V = \frac{ql^3}{2f}.\frac{\gamma}{k}\left|1 + r^2.\beta + 2(\beta+1)\frac{n-1}{n}\left(\frac{r}{4} + \frac{r}{3n} + (r-1)\frac{n+1}{3}\right)\right|. \quad \mathbf{33.}$$

И окончательно послѣднее слагаемое въ скобкѣ предыдущаго выраженія можно написать такъ:

$$\frac{\beta+1}{3}\left(1{,}5\,r + 2n(r-1) + \frac{2}{n}\left(1 - \frac{3r}{4}\right) - \frac{2r}{n^2}\right). \quad . \; . \; . \quad \mathbf{34.}$$

Наивыгоднѣйшее расположеніе раскосовъ было найдено нами для случая равномѣрной нагрузки, дѣйствующей по всему пролету фермы, а между тѣмъ стропила, кромѣ такой нагрузки подвергаются еще одностороннему дѣйствію вѣтра.

Усилія въ раскосахъ, какъ это можно прослѣдить по сдѣланному выводу, не зависятъ отъ того, дѣйствуетъ-ли нагрузка съ одной стороны, или она распространяется по всей фермѣ, такъ какъ разность натяженій нижняго пояса, по которой опредѣляются усилія въ раскосахъ, остается величиной постоянной въ обоихъ случаяхъ.

Добавочное натяженіе въ поясахъ фермъ уменьшится при этомъ на нѣкоторую постоянную величину, которая не войдетъ въ выраженіе производной при опредѣленіи *min.* вѣса.

Нагрузка отъ вѣтра вообще представляетъ собою сравнительно небольшую часть общей нагрузки, на которую разсчитываются стропила, поэтому безъ особой погрѣшности можно принимать для разсчета поясовъ нагрузку отъ дѣйствія вѣтра продолженною и на другую сторону.

Въ стропилахъ же съ большимъ подъемомъ дѣйствіе вѣтра слѣдуетъ брать, какъ одностороннюю нагрузку, въ противномъ случаѣ поперечные размѣры частей стропилъ выходятъ излишне большими.

## Англійскія фермы съ вертикальными раскосами.

$x = 0$ . . . . . . . фиг. 4

Сводъ всѣхъ данныхъ для разсчета усилій въ этихъ фермахъ получимъ изъ предыдущихъ общихъ формулъ, полагая въ нихъ

$$x = 0.$$

$$U_m = \frac{ql}{2n}(m+1),$$

такъ какъ при $x_m = 0$

$$c_m = h_m = f \cdot \frac{m}{n}$$

и

$$a = \frac{l}{n}.$$

Натяженіе тягъ

$$t_m = \frac{ql}{2f}\sqrt{a^2 + h_{m+1}^2}\,.$$

Сжатіе верхняго пояса

$$S_m = \frac{ql^2}{2n\,.\,f} \cdot r\,(2n - m).$$

Сжатіе верхняго пояса панели $O$

$$S_0 = S_1 = \frac{ql^2}{2n\,.\,f} \cdot r\,(2n - 1).$$

Натяженіе нижняго пояса

$$T_m = \frac{ql^2}{2n \cdot f} \cdot (2n - m - 1).$$

Натяженіе нижняго пояса панели $O$

$$T_0 = \frac{q\,l^2}{2n\,f}(2n - 1).$$

Подобно предыдущему найдемъ и вѣсъ всѣхъ частей.
Вѣсъ нижняго пояса

$$N \cdot \sum_0^{n-1}(2n - m - 1) = N \cdot \left(\frac{3}{2}n^2 - \frac{n}{2}\right) =$$

$$= \frac{ql^3}{2f} \cdot \frac{\gamma}{k}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2n}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{35}$$

Вѣсъ верхняго пояса

$$N \cdot r^2 \cdot \beta \sum_0^{n-1}(2n - m - 1) + N \cdot r^2 . \beta\,(2n - 1) =$$

$$= N \cdot r^2\,\beta\left(\frac{3}{2}n^2 + \frac{n}{2} - 1\right) =$$

$$= \frac{ql^3}{2f} \cdot \frac{\gamma}{k} \cdot r^2 . \beta\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{36.}$$

Вѣсъ стоекъ

$$\frac{q\,l}{2n} \cdot \frac{\beta\gamma}{k} \cdot \frac{f}{n} \sum_1^{n-1} m\,(m + 1) =$$

$$= \frac{ql \cdot f}{6} \cdot \frac{\beta\gamma}{k}\left(n - \frac{1}{n}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{37.}$$

Вѣсъ тягъ

$$\frac{ql}{2f} \cdot \frac{\gamma}{k} \cdot \sum_1^{n-1}\left(\frac{l^2}{n^2} + \frac{(m+1)^2 . f^2}{n^2}\right) =$$

$$= \frac{ql}{2f} \cdot \frac{\gamma}{k} \cdot \frac{n-1}{n^2}\left(s^2 + f^2 \cdot n . \frac{2n+5}{6}\right) \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{38.}$$

Полный вѣсъ полуфермы будетъ

$$V = \frac{ql^3}{2f} \cdot \frac{\gamma}{k}\left[\frac{3}{2}(1 + r^2 \cdot \beta) + \frac{r^2 \cdot \beta - 1}{2n} - \frac{r^2 \cdot \beta}{n^2} + \frac{n-1}{n^2} \cdot r^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{f^2}{l^2}\left(\frac{1}{3n} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6n} + \frac{\beta}{3} \cdot \frac{n^2 - 1}{n}\right)\right] \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{39.}$$

И окончательно

$$V=\frac{q l^3}{2f}\cdot\frac{\gamma}{k}\left[1+r^2\cdot\beta+\frac{\beta+1}{3}\left\{1{,}5\cdot r^2+\frac{1+0{,}5\cdot r^2}{n}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+n\,(r^2-1)-\frac{3\,r^2}{n^2}\right\}\right]\quad\ldots\ldots\ldots\quad \mathbf{40.}$$

## Фермы съ вертикальными тягами.

$x=a$ . . . . . . . . фиг. 5.

Сводъ всѣхъ данныхъ для разсчета усилій въ этихъ фермахъ получимъ изъ предыдущихъ общихъ формулъ, полагая въ нихъ $x=a$. Тогда

$$c_m^2=h_m^2+a^2$$

$$d_m=h_{m+1}.$$

Сжатіе наклонныхъ раскосовъ

$$U_m=\frac{q\,l}{2n\,.\,f}\sqrt{l^2+f^2\,.\,m^2}\,.$$

Натяженіе вертикальныхъ тягъ

$$t_m=\frac{q\,l}{2n}\,.\,m.$$

Средняя тяга имѣетъ вдвое большее натяженіе сравнительно съ тѣмъ, что даетъ эта послѣдняя формула, такъ какъ эта тяга ($d_4$ на фиг. 5) совмѣщаетъ въ себѣ двѣ тяги двухъ полуфермъ.

Сжатіе верхняго пояса

$$S_m=\frac{q\,l^2}{2\,nf}\,(2n-m-1).$$

Сжатіе верхняго пояса панели $O$

$$S_0=\frac{q\,l^2}{2n\,.\,f}(2n-1).$$

Натяженіе нижняго пояса

$$T_m=\frac{q\,l^2}{2\,n\,f}\,(2n-m-1).$$

Натяженіе нижняго пояса панели $O$

$$T_0 = \frac{q\,l^2}{2\,n\,f}\,(2n-1).$$

Длина нижняго пояса панели $O$ равна $2a$. Вѣсъ нижняго пояса выразится такъ

$$N(2n-1) + N\sum_1^{n-1}(2n-m-1) =$$

$$= \frac{ql^3}{2f}\cdot\frac{\gamma}{k}\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n^2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{41}.$$

Вѣсъ верхняго пояса

$$N\,.\,r^2\,.\,\beta\sum_0^{n-1}(2n-m-1) =$$

$$= \frac{ql^3}{2f}\cdot\frac{\gamma}{k}\,.\,r^2\,.\,\beta\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2n}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{42}.$$

Вѣсъ раскосовъ

$$\frac{ql^3}{2f}\cdot\frac{\beta\gamma}{k}\cdot\frac{n-1}{n^2}\left(1+\frac{f^2}{l^2}\cdot\frac{n(2n-1)}{6}\right) \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{43}$$

Вѣсъ тягъ

$$\frac{ql}{2n}\cdot\frac{\beta\gamma}{k}\cdot\frac{f}{n}\cdot\sum_1^{n-1} m\,(m+1) =$$

$$= \frac{ql}{2n^2}\cdot\frac{\beta\gamma}{k}\cdot f\cdot\frac{n(n^2-1)}{3} =$$

$$= \frac{ql^3}{2f}\cdot\frac{\gamma}{k}\cdot\frac{f^2}{l^2}\cdot\frac{1}{3}\left(n-\frac{1}{n}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{44}.$$

Вѣсъ полуфермы при $x = a$ будетъ

$$V = \frac{ql^3}{2f}\cdot\frac{\gamma}{k}\left[\frac{3}{2}(1+r^2\,.\,\beta) - \frac{r^2\,.\,\beta-1}{2n} - \frac{1}{n^2} + K\right],$$

гдѣ

$$K = \frac{f^2}{3\,l^2}\left(n-\frac{1}{n}\right) + \frac{n-1}{n^2}\left(\beta\cdot\frac{f^2}{6\,l^2}\cdot n(n-1)(2n-1)+1\right) =$$

$$= \beta\,.\,\frac{n-1}{n^2} + \frac{f^2}{l^2}\left(\frac{\beta\,.\,n}{3} - \frac{\beta}{2} + \frac{\beta}{6n} + \frac{n^2-1}{3n}\right).$$

И окончательно

$$V = \frac{ql^3}{2f}\cdot\frac{\gamma}{k}\left[1 + r^2\,.\,\beta + \frac{\beta+1}{3}\left\{1{,}5 + n\,(r^2-1) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{n}(2{,}5-r^2) - \frac{3}{n^2}\right\}\right] \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{45}.$$

## Фермы 2-го класса.

Въ разсмотрѣнныхъ выше фермахъ раскосы и тяги каждой послѣдующей панели принимаютъ на себя дѣйствіе нагрузокъ всѣхъ предыдущихъ панелей. Въ фермахъ 2-го класса (сист. *Полонсо*, фиг. 6) этого нѣтъ, такъ какъ онѣ состоятъ изъ ряда симметричныхъ и подобныхъ треугольныхъ фермъ, опирающихся на узлы слѣдующихъ фермъ числомъ вдвое меньше, а эти послѣднія опираются на слѣдующій рядъ фермъ числомъ опять вдвое меньше и т. д. При устройствѣ такихъ фермъ, совпадающіе по направленію тяги и пояса двухъ послѣдующихъ рядовъ фермъ совмѣщаются въ одно цѣлое.

Хотя разсмотрѣніе усилій и вѣса для фермъ *Полонсо* можетъ быть получено указаннымъ выше общимъ путемъ, но проще будетъ для полученія искомыхъ результатовъ воспользоваться отличительнымъ ея геометрическимъ свойствомъ.

### Раціональныя фермы 2-го класса.

Каждая элементарная ферма (фиг. 8)—на подобіе фермы *Полонсо*—состоитъ изъ двухъ панелей. Для полученія наивыгоднѣйшаго расположенія раскосовъ въ этомъ случаѣ, надо въ выраженіе $x$, дающее *min* вѣса и представляемое формулой **26**, подставить $m = 1$. Тогда получимъ

$$x = a \cdot r \cdot \sqrt{2} - a \quad \text{. . . . . . . . . . .} \quad \mathbf{46.}$$

Затѣмъ будемъ имѣть

$$c_m = \sqrt{h_m^2 + a_m^2 (r\sqrt{2} - 1)^2} = a_m \sqrt{3r^2 - 2\sqrt{2}r}$$

$$d_m = \sqrt{4h_m^2 + a_m^2 (2 - r\sqrt{2})^2} = a_m \sqrt{6r^2 - 4\sqrt{2}r}$$

Усиліе стойки

$$U_m = q \cdot a_m \cdot \frac{l}{f} \cdot \frac{c_m}{a_m \cdot r\sqrt{2}} = q \cdot a_m \cdot \frac{l}{f} \sqrt{\frac{3}{2} - \frac{1}{r}\sqrt{2}}\ .$$

Усиліе наклонной тяги

$$t_m = q \cdot a_m \cdot \frac{l}{2f} \cdot \frac{d_m}{a_m \cdot r\sqrt{2}} = q \cdot a_m \cdot \frac{l}{2f}\sqrt{3 - \frac{2}{r}\sqrt{2}}\,.$$

Вѣсъ стойки

$$V_c = \frac{\gamma}{k} \cdot \beta \cdot q \cdot a_m^2 \cdot \frac{l}{f}\left(\frac{3r}{\sqrt{2}} - 2\right).$$

Вѣсъ наклонной тяги

$$V_t = \frac{\gamma}{k} \cdot q \cdot a_m^2 \cdot \frac{l}{f}\left(\frac{3r}{\sqrt{2}} - 2\right).$$

Для средней стойки и тяги $a_m = \frac{l}{2}$. Такихъ стоекъ и наклонныхъ тягъ—по одной.

Для двухъ стоекъ и двухъ тягъ второго порядка имѣемъ $a_m = \frac{l}{4}$.

Для четырехъ стоекъ и 4-хъ тягъ третьяго порядка имѣемъ $a_m = \frac{l}{8}$ и т. д.

Общій вѣсъ стоекъ будетъ

$$\frac{\gamma}{k} \cdot \beta \cdot \frac{q\,l^3}{4f}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdot \quad \cdot \quad \cdot \cdot\right)\left(\frac{3r}{\sqrt{2}} - 2\right).$$

Общій вѣсъ наклонныхъ тягъ выразится такъ

$$\frac{\gamma}{k} \cdot \frac{q\,l^3}{4f}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot\right)\left(\frac{3r}{\sqrt{2}} - 2\right).$$

Натяженіе горизонтальныхъ тягъ, составляющихъ нижній поясъ будетъ равно

$$\frac{1}{2} \cdot q \cdot a_m \cdot \frac{l}{f}.$$

Длина горизонтальной тяги

$$a_m + x = a_m \cdot r\sqrt{2},$$

за исключеніемъ тяги $O$, для которой $x = 0$ и длина которой равна $l$.

Общее выраженіе вѣса горизонтальной тяги

$$V_a = \frac{\gamma}{k} \cdot \frac{q\,l}{f} \cdot \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot a_m^2.$$

Для тяги 1-й надо положить въ этой формулѣ $a_m = \frac{l}{2}$, для второй — $\frac{l}{4}$, для третьей — $\frac{l}{8}$ и т. д.

Для горизонтальной тяги $O$ вѣсъ будетъ

$$\frac{\gamma}{k} \cdot \frac{q\, l^3}{2f}.$$

Полный вѣсъ горизонтальныхъ тягъ будетъ

$$\frac{\gamma}{k} \cdot \frac{q\, l^3}{4f}\left[2 + \frac{r}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\right)\right].$$

Усиліе лѣвой половины пояса сжатія каждой элементарной фермы будетъ

$$\frac{1}{2} \cdot q \cdot a_m \cdot \frac{s}{f} = \frac{1}{2} \cdot q \cdot \frac{l}{f} \cdot r \cdot a_m,$$

длина ея

$$S_m = r \cdot a_m.$$

Усиліе правой половины пояса сжатія по общей формулѣ равно

$$q \cdot \frac{l}{f} \cdot r \cdot a_m \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{r\sqrt{2}}\right).$$

Сумма этихъ усилій *обѣихъ половинъ* верхняго пояса

$$q \cdot \frac{l}{f} \cdot a_m \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

и вѣсъ ихъ

$$q \cdot \frac{l}{f} \cdot \frac{\gamma}{k} \cdot \frac{\beta \cdot r}{\sqrt{2}} \cdot a_m^2 \, .$$

Для фермы 1-й въ этихъ формулахъ надо подставить $a_m = \frac{l}{2}$, для фермы второй — $\frac{l}{4}$ для третьей — $\frac{l}{8}$ и т. д.

Поясъ сжатія фермы $O$ составляетъ исключеніе. Длина его равна $l \cdot r$, усиліе его

$$\frac{1}{2} \cdot q \cdot \frac{l^2}{f} \cdot r,$$

и вѣсъ пояса $O$ равенъ

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{q\, l^3}{f} \cdot r^2 \, .$$

Общій вѣсъ пояса сжатія всѣхъ элементарныхъ фермъ будетъ

$$\frac{q\,l^3}{4\,f}\cdot\frac{\beta\cdot\gamma}{k}\left[2r^2+\frac{r}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots\right)\right].$$

Сумма

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots\cdots=2\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

гдѣ $n$—число панелей, кратное степенямъ $2$, т. е. 2, 4, 8, 16... и т. д.

Общій вѣсъ всѣхъ частей *половины* раціональной фермы 2-го класса будетъ

$$\frac{q\,l^3}{2\,f}\cdot\frac{\gamma}{k}\left[1+\beta\cdot r^2+2(\beta+1)(r\sqrt{2}-1)\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]\cdots\cdots\mathbf{47.}$$

На фиг. 8 изображена раціональная симметричная ферма съ числомъ панелей $2n=16$.

## Обыкновенныя фермы Полонсо.

Обыкновенно ферму *Полонсо* строятъ, придавая стойкамъ направленіе, перпендикулярное къ поясу сжатія (фиг. 6).

Въ этомъ случаѣ

$$x=h_m\cdot\frac{f}{l}=a_m\cdot\frac{f^2}{l^2}$$

$$c_m=r\cdot\frac{f}{l}\cdot a_m$$

$$d_m=a_m+x=r^2\cdot a_m$$

Усиліе стойки

$$u_m=q\cdot\frac{1}{r}\cdot a_m.$$

Усиліе наклонныхъ тягъ

$$t_m=\frac{q\,l}{2f}\;a_m.$$

Усилія и длины нижняго пояса равны усиліямъ и длинамъ наклонныхъ тягъ.

Поясъ $O$ имѣетъ то же усиліе, что и въ предыдущемъ случаѣ.

Усиліе 1-ой лѣвой половины пояса сжатія равно

$$\frac{1}{2}q\cdot\frac{s}{f}\cdot a_m.$$

Усиліе 2-ой правой половины пояса сжатія

$$\frac{1}{2}\cdot q\cdot\frac{s}{f}\cdot a_m - q\cdot\frac{f}{s}\cdot a_m.$$

Сумма обоихъ усилій пояса сжатія дастъ

$$q\cdot\left(\frac{s}{f}-\frac{f}{s}\right)\cdot a_m.$$

Поясъ фермы $O$ имѣетъ сжимающее усиліе, какъ и въ предыдущемъ случаѣ, равнымъ:

$$\frac{1}{2}\cdot q\cdot\frac{l^2}{f}\cdot r.$$

Вѣса всѣхъ частей, аналогично съ предыдущимъ, получаются въ слѣдующемъ видѣ:

Вѣсъ стоекъ или раскосовъ

$$V_c=\frac{ql}{4}\cdot\frac{\beta\gamma}{k}\cdot f\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\right)=$$

$$=\frac{qlf}{2}\cdot\frac{\beta\gamma}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Сумма вѣсовъ тягъ и пояса растяженія, исключая панель $O$, получается такъ:

$$V_t+V_a=\frac{ql}{2f}\cdot s^2\cdot\frac{\gamma}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Вѣсъ пояса сжатія безъ панели $O$

$$V_s=\frac{ql}{2}\cdot\frac{\beta\gamma}{k}\cdot s\left(\frac{s}{f}-\frac{f}{s}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Вѣсъ пояса сжатія панели $O$

$$\frac{ql^3}{2f}\cdot\frac{\beta\gamma}{k}\cdot r^2.$$

Вѣсъ пояса растяженія панели $O$

$$\frac{ql^3}{2f}\cdot\frac{\gamma}{k}.$$

Сумма вѣсовъ пояса сжатія и стоекъ

$$\frac{ql}{2f}\cdot\frac{\beta\gamma}{k}\cdot s^2\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Замѣняя

$$s^2 = r^2 \cdot l^2,$$

общій вѣсъ обыкновенной полуфермы *Полонсо* (фиг. 6), у которой стойки перпендикулярны къ ногѣ, получимъ равнымъ:

$$V = \frac{ql^3}{2f} \cdot \frac{\gamma}{k}\left[r^2 \cdot \beta + r^2(1+\beta)\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1\right] \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \mathbf{48}.$$

Не трудно видѣть, что вѣсъ обоихъ видовъ фермъ *Полонсо*, т. е. раціональной и обыкновенной, по формуламъ **47** и **48** получится одинаковымъ при условіи

$$\frac{r^2}{2} = r\sqrt{2} - 1,$$

откуда

$$r = \sqrt{2},$$

т. е. *обыкновенная ферма* ***Полонсо*** *удовлетворяетъ условію* ***min*** *вѣса только тогда, когда стропильныя ноги составляютъ съ горизонтомъ уголъ въ 45°.*

## Сводъ данныхъ для опредѣленія усилій въ частяхъ раціональной и обыкновенной фермъ Полонсо.

Этотъ сводъ данныхъ приведенъ здѣсь для обѣихъ фермъ съ числомъ панелей 16, т. е. при $n = 8$. Фермы *Полонсо* съ числомъ панелей болѣе 16 строить не слѣдуетъ, т. к. онѣ представляются мало выгодными.

На фиг. 8 изображена ферма раціональная, а на фиг. 9—обыкновенная, у которой стойки перпендикулярны къ ногѣ фермы.

Въ треугольникахъ между отдѣльными элементами фермы поставлены цифры 1, 2.....14, 15, пользуясь которыми весьма удобно дѣлаются обозначенія различныхъ частей фермы.

Напр., стойка $hi$ на фиг. 8 будетъ носить названіе стойки *10—11*, тяга $ik$ (фиг. 8) будетъ тягою *14—15*, поясъ сжатія $he$ (фиг. 8) будетъ поясомъ *12*, поясъ растяженія $kl$ (фиг. 8) будетъ поясомъ *7* и т. д.

**Ферма раціональная** — фиг. 8, число панелей $2n = 16$.

Усилія *въ поясъ сжатія* вычисляются по общей формулѣ вида

$$\frac{1}{16} \cdot q l^2 \cdot \frac{r}{f}\left(\mathbf{A} + \frac{\mathbf{B}}{r\sqrt{2}}\right),$$

гдѣ $A$ и $B$ — величины, перемѣнныя для различныхъ панелей и выбираемыя изъ слѣдующей таблички:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Панель ...... | 1 | 2 | 5 | 6 | 8 | 9 | 12 | 13 |
| Величина **A**... | 15 | 13 | 11 | 9 | 7 | 5 | 3 | 1 |
| „ **B**... | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 |

Усилія *въ поясъ растяженія* вычисляются по общей формулѣ вида

$$\mathbf{C} \cdot \frac{q l^2}{f}.$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Для панели ... | 1 | 3 | 7 | 15 |
| Величина **C**... | $\frac{15}{16}$ | $\frac{7}{8}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |

*Натяженіе въ тягахъ* вычисляется по общей формулѣ вида

$$\mathsf{D}\cdot\frac{ql^2}{f}\sqrt{3-\frac{2\sqrt{2}}{r}}.$$

| Для тягъ. . | 2—3; 9—10; 4—5; 11—12 | 4—7; 10—14 | 6—7; 8—14 | 14—15 | 11—15 | 13—15 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Величина D | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{7}{16}$ |

*Силы сжатія стоекъ* вычисляются по формулѣ

$$\mathsf{E}\cdot\frac{ql^2}{f}\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{2}}{r}}.$$

| Для стоекъ . | 7 — 14 | 3 — 4; 10 — 11 | 1 — 2; 5 — 6; 8 — 9; 12 — 13 |
|---|---|---|---|
| Величина E. | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |

**Ферма обыкновенная** — фиг. 9, число панелей $2n=16$.

Усилія *въ поясъ сжатія* вычисляются по формулѣ

$$\frac{15}{16}\frac{ql^2}{f}\cdot r-\mathsf{F}\cdot\frac{qf}{r}.$$

| Для панели . . . | 1 | 2 | 5 | 6 | 8 | 9 | 12 | 13 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Величина F . . . | 0 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{5}{8}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{7}{8}$ |

Усилія *въ поясъ растяженія* вычисляются такъ

$$\mathsf{H}\cdot\frac{ql^2}{f}.$$

| Для панели . . . | 1 | 3 | 7 | 15 |
|---|---|---|---|---|
| Величина H . . . | $\frac{15}{16}$ | $\frac{7}{8}$ | $\frac{3}{4}$ | $\frac{1}{2}$ |

*Натяженіе въ тягахъ* вычисляется по формулѣ

$$\mathsf{K}\cdot\frac{ql^2}{f}.$$

| Для тягъ . | 2—3; 9—10; 4—5; 11—12 | 4—7; 10—14 | 6—7; 8—14 | 14—15 | 11—15 | 13—15 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Величина K . | $\frac{1}{16}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{16}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{3}{8}$ | $\frac{7}{16}$ |

*Силы сжатія стоекъ* вычисляются по формулѣ

$$\mathbf{N} \cdot q . \frac{l}{r} .$$

| Для стоекъ . | 7 — 14 | 3 — 4; 10 — 11 | 1 — 2; 5 — 6; 8 — 9; 12 — 13 |
|---|---|---|---|
| Величина **N**. | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ |

## Данныя для сравненія вѣса фермъ 1-го и 2-го класса.

Въ выраженіяхъ вѣса пяти разсмотрѣнныхъ нами фермъ 1-го и 2-го класса, т. е. въ формулахъ

**33, 40, 45, 47** и **48,**

имѣется одинъ общій членъ вида

$$\frac{q\,l^3}{2f}\cdot\frac{\gamma}{k}(1+r^2\,.\,\beta),$$

т. е. вѣсъ треугольной фермы безъ раскосовъ и тягъ. Вычитая эту постоянную величину изъ формулъ вѣса, получимъ *сравнительныя выраженія тѣхъ частей вѣса разныхъ полуфермъ, которыя зависятъ отъ расположенія ихъ раскосовъ,* или добавочную величину къ вѣсу треугольной фермы безъ раскосовъ и тягъ. Для краткости будемъ называть эту величину просто *добавочнымъ вѣсомъ отъ раскосовъ и тягъ.*

Выведемъ обозначеніе:

$$\varPhi=\frac{q\,l^3}{2f}\cdot\frac{\gamma}{k}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{49}.$$

Величины добавочнаго вѣса будутъ:

*Въ раціональной фермѣ* 1-го класса (см. формулы **33** и **34**), гдѣ $x$ опредѣляется по форм. **26**:

$$\varPhi\cdot\frac{\beta+1}{3}\left(1{,}5\,r+2n\,(r-1)+\frac{2}{n}\left(1-\frac{3r}{4}\right)-\frac{2r}{n^2}\right). \; . \; . \; \mathbf{50}.$$

*Въ фермѣ* $x=o$ (см. форм. **40**):

$$\varPhi\cdot\frac{\beta+1}{3}\left(1{,}5\,r^2+\frac{1+0{,}5r^2}{n}+n\,(r^2-1)-\frac{3r^2}{n^2}\right) \; . \; . \; . \; \mathbf{51}.$$

*Въ фермѣ* $x=a$ (см. форм. **45**):

$$\varPhi\cdot\frac{\beta+1}{3}\left(1{,}5+n\,(r^2-1)+\frac{2{,}5-r^2}{n}-\frac{3}{n^2}\right). \; . \; . \; . \; \mathbf{52}.$$

*Въ фермѣ Полонсо раціональной* (см. форм. **47**):

$$\Phi \cdot 2(\beta+1)(r\sqrt{2}-1)\left(1-\frac{1}{n}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{53.}$$

*Въ фермѣ Полонсо обыкновенной* (см. форм. **48**):

$$\Phi \cdot (\beta+1)\left(1-\frac{1}{n}\right) . \, r^2 . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{54.}$$

Изъ разсмотрѣнія всѣхъ этихъ формулъ видно, что величины добавочнаго вѣса во всѣхъ фермахъ пропорціональны $(\beta+1)$.

Для нагляднаго сравненія между собою формулъ **50**, **51** **52**, **53** и **54** въ дальнѣйшемъ вычислена величина множителя, который слѣдуетъ за $\Phi$ въ каждой формулѣ. Этотъ множитель названъ чрезъ $A$.

При вычисленіи $A$ принято, что:

1) Подъемъ крыши $f$ составляетъ $\frac{1}{5}$ ея пролета $2\,l$, т. е.

$$\frac{f}{l}=\frac{1}{2{,}5}=0{,}4.$$

2) Числовое значеніе

$$r=\frac{b}{a}=\frac{s}{l}=\sqrt{\frac{l^2+f^2}{l^2}}=1{,}077.$$

$$r^2=1{,}16.$$

3) Отношеніе прочнаго сопротивленія на разрывъ и на сжатіе $=1.5$. Въ практикѣ разсчета стропилъ, принимая во вниманіе поправку коэффиціента сжатія по формулѣ *Шварцъ-Ранкина*, величина $\beta$ колеблется отъ 1,25 до 1,65. Какъ замѣчено ранѣе, измѣненіе $\beta$ вліяетъ однообразнымъ образомъ на измѣненіе добавочнаго вѣса всѣхъ разсмотрѣнныхъ фермъ.

Принявши въ основаніе разсчета, при сравненіи фермъ между собою, вышеприведенныя числовыя величины, числовое значеніе коэффиціента $A$ будемъ вычислять по формуламъ:

Ферма раціональная:

$$A=\frac{1}{3}\left(4{,}0388+0{,}385+\frac{0{,}9613}{n}-\frac{5{,}385}{n^2}\right).$$

Ферма $x=0$

$$A=\frac{1}{3}\left(4{,}35+0{,}4n+\frac{3{,}95}{n}-\frac{8{,}7}{n^2}\right).$$

Ферма

$$x = a$$

$$A = \frac{1}{3}\left(3{,}75 + 0{,}4n + \frac{3{,}35}{n} - \frac{7{,}5}{n^2}\right).$$

Ферма Полонсо раціональная

$$A = 2{,}6144\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Ферма Полонсо обыкновенная

$$A = 2{,}9 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Добавочный вѣсъ фермъ

$$A \cdot \Phi = A \cdot \frac{ql^3}{2f} \cdot \frac{\gamma}{k}.$$

## Таблица величинъ $A$ для сравненія между собою добавочнаго вѣса фермъ.

| $n$ | Фермы перваго класса. | | | Фермы Полонсо. | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Раціональная. | $x = O.$ | $x = a.$ | Раціональная. | Обыкновенная. |
| 2 | 1,3077 | 1,65 | 1,45 | 1,307 | 1,45 |
| 4 | 1,8387 | 2,1313 | 1,9063 | 1,9607 | 2,175 |
| 8 | 2,3979 | 2,6359 | 2,4172 | 2,2875 | 2,5375 |
| 16 | 3,4209 | 3,6543 | 3,4434 | 2,4509 | 2,7187 |

**Примѣчаніе къ таблицѣ величинъ А.** Формулы вѣсовъ всѣхъ полуфермъ, разсмотрѣнныхъ нами, представляютъ собою точныя выраженія, за исключеніемъ формулы вѣса для раціональной фермы 1-го класса, при составленіи которой точный процессъ суммированія замѣненъ приближеннымъ, болѣе простымъ, дающимъ результатъ съ точностью, достаточною для цѣлей практики. Но для полученія данныхъ для болѣе точнаго сравненія между собою вѣса различныхъ фермъ, въ таблицѣ и для раціональной фермы высчитаны величины $A$ *точнымъ образомъ*, не пользуясь данной здѣсь приближенной формулой.

Изъ таблицы величинъ $A$ видно, что, при увеличеніи числа панелей отъ 2 до 8, вѣса добавочныхъ частей фермъ (подкосовъ и тягъ) увеличиваются почти въ 1,8 раза.

Вѣсъ полуфермы безъ раскосовъ, при выбранныхъ нами величинахъ $\beta$ и $r$, будетъ

$$\Phi(1+r^2\cdot\beta)=2{,}74\cdot\Phi.$$

Вѣсъ раціональной фермы 1-го класса съ *двумя* панелями будетъ

$$\Phi(2{,}74+1{,}31)=4{,}05\cdot\Phi,$$

а съ *восемью* панелями

$$\Phi(2{,}74+2{,}40)=5{,}14\cdot\Phi.$$

Отсюда ясно, насколько *важенъ вопросъ о выборѣ числа панелей для даннаго пролета.*

Сравненіе добавочныхъ вѣсовъ полуфермъ, приведенныхъ въ таблицѣ величинъ $A$, показываетъ, что:

1) *вѣса* **раціональныхъ** *фермъ 1-го и 2-го класса почти одинаковы при числѣ панелей до восьми (т. е. до* $n=4$*);*

2) *при числѣ панелей болѣе 8* **раціональныя** *фермы 2-го класса легче* **раціональныхъ** *фермъ 1-го класса;*

3) *изъ остальныхъ фермъ, употребляемыхъ въ практикѣ, фермы съ вертикальными тягами* ($x=a$) *по своему вѣсу ближе всего подходятъ къ раціональнымъ,*—и потому именно, что при выбранныхъ нами величинахъ $r$ и $\beta$ числовое значеніе $x$ близко подходитъ къ $a$.

Такъ какъ по отношенію къ сборкѣ и установкѣ между разсмотрѣнными нами фермами нѣтъ никакой разницы, то въ практическомъ отношеніи стоимость фермъ можетъ быть принимаема почти пропорціональною вѣсу употребляемаго на нихъ матеріала. Слѣдовательно, вообще говоря,

*раціональныя стропильныя фермы дешевле, чѣмъ фермы, обыкновенно употребляемыя въ практикѣ.*

Изъ той же таблицы видно, что *рѣзкой разницы между вѣсами фермъ, правильно разсчитанныхъ, не получается,* такъ что, въ силу практическимъ соображеній (подвѣса потолочныхъ балокъ, передачи сосредоточенныхъ грузовъ и проч.), постановка каждой фермы можетъ быть оправдана, даже и при нѣсколько увеличенномъ ея вѣсѣ.

## Поправки въ теоретической формулѣ вѣса фермы.

Примѣняя вышеприведенныя формулы къ практическимъ разсчетамъ, необходимо принять въ соображеніе величины коэффиціентовъ $\beta$ и $\beta_1$, которые для простоты нашихъ выводовъ были взяты равными. На самомъ дѣлѣ, если для разсчета сжатыхъ частей фермы пользоваться формулой *Шварцъ-Ранкина*, то для фермъ 2-го класса, какъ имѣющихъ меньшія длины сжатыхъ раскосовъ, коэффиціентъ $\beta$ будетъ меньше, чѣмъ для фермъ 1-го класса, слѣдовательно, и вѣсъ сжатыхъ стоекъ первыхъ фермъ будетъ меньше.

Равнымъ образомъ, при употребленіи готоваго матеріала на издѣліе стропилъ, нѣтъ иногда практической возможности придавать каждому раскосу и каждой тягѣ свои отдѣльные размѣры, получающіеся по разсчету, вслѣдствіе чего получается отступленіе отъ теоретическаго вѣса; и это отступленіе для раскосовъ фермъ 1-го класса всегда будетъ больше, чѣмъ для фермъ *Полонсо*.

Увеличеніе вѣса противъ высчитанной теоретической его величины приходится дѣлать, имѣя въ виду слѣдующее:

1) Стыки поясовъ и прикрѣпленія раскосовъ при заклепочныхъ соединеніяхъ ослабляютъ рабочее сѣченіе частей, примѣрно, на 15—20%. Въ случаѣ употребленія шарнирныхъ соединеній этого ослабленія нѣтъ, но зато работа шарнирныхъ соединеній въ стропилахъ стоитъ гораздо дороже заклепочныхъ.

2) Невозможность подобрать желѣзо строго пропорціонально усиліямъ, дѣйствующимъ въ паneляхъ, заставляетъ употреблять одинаковыхъ размѣровъ матеріалъ для двухъ и трехъ панелей, несмотря на разныя усилія, дѣйствующія въ нихъ.

3) Каждый стыкъ для связи поясовъ съ раскосами и тягами требуетъ для себя опредѣленнаго добавочнаго количества матеріала.

Какой бы родъ соединеній ни былъ выбранъ для фермъ, самую цѣнную часть работы составляетъ выполненіе стыка.

Въ случаѣ заклепочныхъ швовъ, стыки берутся фасонной или прямой формы, выкраиваются изъ листового желѣза и представляютъ собою наиболѣе трудную часть работы по изготовленію стропилъ. Для малыхъ размѣровъ фермъ, пролетомъ до 4 саж., стыки дѣлаются изъ листовъ отъ $\frac{1}{4}$ до $\frac{5}{16}$ дюйма, при бо́льшихъ пролетахъ—отъ $\frac{3}{8}$ до $\frac{1}{2}$ д.

Хотя вѣсъ стыковъ и зависитъ отъ усилій, но эта зависимость выражается въ слабой степени: при малой величинѣ пролета вѣсъ стыка, конечно, будетъ меньше, чѣмъ для большого, но зато относительная его стоимость въ общей цѣнѣ издѣлія стропилъ для большого пролета будетъ меньше, чѣмъ для малаго. Изъ цѣлаго ряда примѣровъ разсчета стропилъ выяснилось, что вѣсъ добавочнаго матеріала стыковъ надо считать не менѣе 1 пуда на каждую панель.

## Передача нагрузки на фермы.

Стропила, установленныя на мѣсто, принимаютъ на себя нагрузку передающуюся на кровельный матеріалъ, покоющійся на обрѣшетинахъ. Передача отъ нихъ давленія на фермы дѣлается или непосредственно, если обрѣшетина лежитъ на поясѣ фермы, или же посредствомъ прогоновъ, которые принимаютъ на себя равномѣрную нагрузку отъ обрѣшетины, а затѣмъ передаютъ ее на узлы фермы въ видѣ сосредоточенныхъ нагрузокъ.

Въ 1-мъ случаѣ, т. е. когда обрѣшетина лежитъ непосредственно на фермѣ, поясъ сжатія у фермы подвергается дѣйствію сгибающихъ моментовъ отъ равномѣрной нагрузки, лежащей между двумя смежными узлами пояса; при этомъ величина сгибающаго момента каждой панели верхняго пояса будетъ

$$\frac{q_0 \cdot e \cdot a^2}{8} = \frac{q_0 \cdot e}{8} \cdot \frac{l^2}{n^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \mathbf{55},$$

если $q_0$ будетъ нагрузка на квадр. единицу площади крыши,

$e$ — разстояніе между фермами и

$a = \frac{l}{n}$ — длина панели.

Въ случаѣ прогоновъ, идущихъ вдоль крыши *по узламъ* фермъ, поясъ сжатія ихъ не испытываетъ на себѣ сгибающаго дѣйствія. Оно передается въ этомъ случаѣ на прогоны, и величина сгибающаго момента для прогона будетъ

$$q_0 \cdot a \cdot \frac{e^2}{8} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \mathbf{56}.$$

Въ зависимости отъ разстоянія между стропильными фермами можно рѣшить вопросъ, что будетъ выгоднѣе — ставить-ли прогоны или класть обрѣшетину непосредственно на верхній поясъ фермы.

Не принимая въ разсчетъ матеріала, который пойдетъ на обрѣшетины, всегда окажется выгоднѣе класть послѣднюю непосредственно на пояса стропилъ; но если принять во вниманіе также и вѣсъ обрѣшетины, то окажется, что, если разстояніе между узлами фермъ меньше растоянія между самыми фермами, выгоднѣе ставить продольный прогонъ. Но при этомъ вѣсъ матеріала, затраченнаго на прогоны, всегда будетъ больше, чѣмъ вѣсъ добавочнаго матеріала въ поясѣ сжатія, появляющагося вслѣдствіе сгибанія пояса нагрузкою.

## Опредѣленіе числа панелей фермы.

При данномъ пролетѣ фермы вѣсъ растягиваемыхъ и сжимаемыхъ частей ея возрастаетъ по мѣрѣ увеличенія числа панелей $n$. Вѣсъ добавочнаго матеріала въ поясѣ сжатія, появляющагося вслѣдствіе сгибанія пояса нагрузкою, наоборотъ, уменьшается по мѣрѣ увеличенія $n$; кромѣ того, одновременно съ этимъ повышается и допускаемая величина сопротивленія въ поясѣ сжатія, вслѣдствіе уменьшенія длины панелей. И надо выбрать $n$ такимъ образомъ, чтобы стоимость всего устройства была $min$.

Задача объ опредѣленіи наивыгоднѣйшаго числа панелей въ общемъ алгебраическомъ видѣ представляетъ большія затрудненія, поэтому здѣсь мы остановимся на разсмотрѣніи числового примѣра, предполагая, что обрѣшетина лежитъ непосредственно на верхнемъ поясѣ и состоитъ изъ сплошныхъ досокъ шириною 6 дюйм.

Нагрузка на крышу отъ вѣтра, снѣга, кровельнаго желѣза и обрѣшетины, при среднихъ уклонахъ крыши отъ $\frac{1}{6}$ до $\frac{1}{4}$ пролета, выходитъ не болѣе 1 пуда на 1 квадр. футъ (около 175 килогр. на 1 кв. $mt$). Вѣсъ идущаго по крышѣ человѣка (5 пуд.) можно предположить передающимся на 2 смежныхъ обрѣшетины, т. е. на полосу сплошной обрѣшетины шириною въ 12 дм.

Пусть $e$ выражаетъ въ фут. разстояніе между стропильными фермами. Тогда сгибающій моментъ, который передается на полосу обрѣшетины въ 12 дм. шириною, будетъ

$$M=\frac{e^2 . 12}{8}+\frac{5\, e . 12}{4} \text{ пудо-дм.}$$

Прочное сопротивленіе дерева сгибанію примемъ въ 30 пуд. на 1 кв. дм. Тогда модуль сопротивленія доски обрѣшетины въ 12 дм. шириною будетъ

$$W=\frac{12 . \delta^2}{6}=\frac{e^2}{20}+\frac{e}{2}.$$

Откуда толщина досокъ въ дюймахъ

$$\delta = \sqrt{\frac{e^2}{40} + \frac{e}{4}},$$

гдѣ $e$ — въ фут. Принимая вѣсъ 1 куб. фут. дерева $=1$ пуд., *вѣсъ 1 квадр. фута обрѣшетины* получимъ равнымъ

$$\frac{1}{12}\sqrt{\frac{e^2}{40} + \frac{e}{4}} \text{ пуд.}$$

При $e = 7$ фут. . . . . . . . $\delta = 1{,}72$ дм.

„ $e = 10$ „ . . . . . . . $\delta = 2{,}25$ „

Обыкновенно обрѣшетина дѣлается не толще $1^3/_4$ дм., поэтому и разстояніе между фермами принимаютъ въ 7 фут.

Если обрѣшетина лежитъ на прогонахъ, то разстояніе между ними по горизонтали равно разстоянію $a$ между узлами фермы, и *вѣсъ 1 квадр.фута обрѣшетины* будетъ

$$\frac{1}{12}\sqrt{\frac{a^2}{40} + \frac{a}{4}} \text{ пуд.}$$

Если $a$ болѣе $e$, то вѣсъ обрѣшетины, лежащей непосредственно на фермахъ, будетъ меньше, чѣмъ при существованіи прогоновъ; а если $a$ будетъ менѣе $e$, тогда, наоборотъ, вѣсъ обрѣшетины, лежащей на прогонахъ будетъ меньше, чѣмъ безъ нихъ, но зато въ этомъ случаѣ прибавляется еще вѣсъ прогоновъ.

Съ точностью, достаточною для нашихъ разсужденій, зависимость между величинами сгибающаго момента и вѣсомъ сопротивляющейся ему балки можетъ быть получена изъ тѣхъ таблицъ, которыя даютъ вѣсъ и модули сопротивленія разныхъ сортовъ желѣза, употребляемаго въ поясѣ сжатія.

Разсмотримъ случай примѣненія двутавровыхъ балокъ, *нормальные профили* которыхъ, выработанные *Обществомъ германскихъ инженеровъ*, имѣютъ слѣдующіе модули сопротивленія $W$ въ куб. дм. и вѣсъ $v$ въ пуд. на 1 погонный футъ:

| $N$ балки. | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $W$ куб. дм. | 1,2 | 1,6 | 2,1 | 2,65 | 3,36 | 4,13 | 5,05 | 6 | 7,2 | 8,5 | 9,9 |
| $v$ пуд. . | 0,12 | 0,133 | 0,154 | 0,18 | 0,21 | 0,234 | 0,266 | 0,3 | 0,333 | 0,368 | 0,407 |

Съ достаточною точностію зависимость между вѣсомъ 1 погон. фута балки и ея модулемъ сопротивленія можетъ быть выражена формулою

$$v=0{,}12\sqrt{W} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{57}.$$

Можно было вмѣсто этой найти и болѣе строгую зависимость, прибавляя во 2-й части нѣкоторое постоянное, причемъ тогда измѣнится, конечно, и коэффиціентъ 0,12. Но полученное такимъ образомъ болѣе точное выраженіе не окажетъ никакого вліянія на опредѣленіе числа панелей, потому что $n$ не измѣняется непрерывно, а должно быть цѣлымъ числомъ.

По форм. **55** величина сгибающаго момента каждой панели верхняго пояса будетъ

$$M=\frac{q_0 \cdot e}{8}\cdot\frac{l^2}{n^2}\cdot 12 \text{ пудо-дм.}$$

Принимая коэффиціентъ прочнаго сопротивленія желѣза сгибанію въ 300 пуд. на 1 кв. дм., получимъ

$$W=\frac{q_0 \cdot e}{200}\cdot\frac{l^2}{n^2}$$

$$v=0{,}0084 \cdot \frac{l}{n}\sqrt{q_0 \cdot e}\,.$$

Вѣсъ балки, употребленной на полупролетъ длиною $l$, получится

$$0{,}0084 \; \frac{l^2}{n}\sqrt{q_0 \cdot e}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{58}.$$

При употребленіи желѣза, имѣющаго въ сѣченіи видъ буквы *зетъ*, зависимость между вѣсомъ 1 погон. фута въ пуд. и модулемъ сопротивленія въ куб. дюйм. можетъ быть выражена тою-же формулою **57**, какъ легко усмотрѣть изъ данныхъ слѣдующей таблицы *для нормальныхъ профилей желѣза-зетъ*:

| № профиля. . | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 10 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $W$ куб. дм. . | 0,25 | 0,41 | 0,64 | 0,9 | 1,7 | 2,7 | 4,2 |
| $v$ пуд.. . . | 0,061 | 0,078 | 0,097 | 0,114 | 0,16 | 0,207 | 0,25 |

Иногда сѣченію стропильной ноги придаютъ однотавровую форму, образуя ее склепываніемъ двухъ уголковъ и одной вертикальной полосы между ними. Измѣняя въ этомъ случаѣ размѣры полосы можно измѣнять соотвѣтственно и $W$ для нея, предполагая, что весь сгибающій моментъ воспринимается только одною полосою. При высотѣ полосы $h$ и толщинѣ ея $\delta$ модуль ея будетъ

$$W = \frac{\delta \cdot h^2}{6} \text{ куб. дм.}$$

Вѣсъ 1 погон. фута желѣзной полосы съ размѣрами $\delta \times h$ будетъ

$$v = 0{,}093\, \delta \cdot h = 0{,}228 \sqrt{\delta} \cdot \sqrt{W}.$$

| Толщина полосы $\delta$. | Величина $0{,}228 \sqrt{\delta}$. |
|---|---|
| $\frac{5}{16}$ дм. | 0,127 |
| $\frac{1}{4}$ " | 0,114 |
| $\frac{3}{8}$ " | 0,137 |

Данныя этой таблички показываютъ, что формулу **57** можно примѣнять и въ этомъ случаѣ съ достаточною точностью. Поэтому во всѣхъ случаяхъ возможно будетъ также примѣненіе и формулы **58**. Замѣняя въ ней

$$q_0 \cdot e = q,$$

вѣсу нагрузки, отнесенному къ 1 длины пролета, получимъ вѣсъ балки, сопротивляющейся дѣйствію сгибающихъ моментовъ, на каждую полуферму—въ видѣ

$$0{,}0084 \cdot \frac{l^2}{n} \sqrt{q} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{58,a}.$$

Пользуясь этимъ выраженіемъ, не трудно рѣшить вопросъ и о наивыгоднѣйшемъ расположеніи обрѣшетины, прогоновъ и стропильныхъ фермъ. Для этого нужно будетъ внести выраженіе **58,a** въ формулы вѣса фермъ, данныя выше, взять 1-го производную вѣса по $n$ и приравнять ее нулю.

Выдѣляя постоянныя количества, независящія отъ $n$ и отбрасывая члены, содержащіе въ себѣ множителемъ величины $1 : n$ и $1 : n^2$, какъ почти не оказывающія вліянія на вѣсъ полуфермъ, *значеніе* изслѣдуемой *функціи*, отъ которой надо будетъ брать 1-ю производную, *для раціональной фермы 1-го класса* получимъ въ такомъ видѣ:

$$Z = 0{,}13 \,.\, \Phi \,.\, n + n + 0{,}00315 \,.\, \sqrt{q} \cdot \frac{l^2}{n} \quad . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{59.}$$

*Min* этой функціи, а также и вѣса фермы, получится при значеніи $n$, опредѣляемомъ изъ формулы:

$$n^2 = \frac{0{,}0084 \cdot l^2 \cdot \sqrt{q}}{1 + 0{,}13 \cdot \Phi} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{60,}$$

гдѣ $\Phi$ опредѣляется по формулѣ **49.**

Принимая, какъ и ранѣе,

$e = 7$ фут.—разстояніе между стропилами,

$k = 300$ пуд. на 1 кв. дм. — допускаемое напряженіе въ желѣзѣ на растяженіе,

$\gamma = 0{,}093$ пуд.—вѣсъ погоннаго фута полосы желѣза съ сѣченіемъ въ 1 кв. дм.,

$q = 7$ пуд. — нагрузку на погонный футъ фермы въ горизонтальной ея проекціи (соотвѣтственно нагрузкѣ въ 1 пудъ на 1 кв. футъ) и

$\frac{l}{f} = 2{,}5$, найдемъ

$$\Phi = \frac{0{,}093 \cdot 7}{2 \cdot 300} \cdot \frac{l^3}{f} = 0{,}0027125 \cdot l^2$$

$$0{,}0084 \cdot l^2 \cdot \sqrt{q} = 0{,}022 \cdot l^2.$$

Тогда для раціональной фермы 1-го класса:

$$n^2 = \frac{22 \cdot l^2}{1000 + 0{,}35 \cdot l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{61.}$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| При $l = 7$ | 14 | 21 | 30 | 42 | 60 фут. |
| $n = 1$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |

Если $l$ будетъ очень большая величина, то

$$n = \text{около} \sqrt{\frac{22}{0{,}35}},$$

т.-е. тогда придется взять $n = 8$. Слѣдовательно, при взятыхъ нами нагрузкахъ и при разстояніи между фермами $e = 7$ фут., *больше 8 па-*

*нелей на полупролетъ строить не выгодно*, даже и при самыхъ большихъ пролетахъ.

Не трудно видѣть, что *при полупролетахъ до 40 фут. число панелей пропорціонально $l:7$*, и это будетъ приблизительно та цифра, которую выгоднѣе всего употреблять, какъ величину панели.

При малыхъ пролетахъ, если принимать вѣсъ стыковъ менѣе вышеданной нами величины (1 пудъ на панель), панель выходитъ около 6 фут.

Если бы, при всѣхъ прочихъ одинаковыхъ данныхъ, взять разстояніе между стропильными фермами въ 14 фут., то нашли бы:

$$0{,}13\,\Phi = 0{,}0007 \cdot l^2$$

$$0{,}0084 \cdot l^2 \cdot \sqrt{q} = 0{,}0314 \cdot l^2$$

$$n^2 = \frac{31 \cdot l^2}{1000 + 0{,}7 \cdot l^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \textbf{62.}$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Для $n = 1$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $l = 5{,}74$ | 11,9 | 19,1 | 28,4 | 43 | 79. |

Когда $l$ будетъ очень большая величина

$$n = \text{около} \sqrt{\frac{31}{0{,}7}}, \text{ принимаемъ} = 7.$$

Внося въ выраженіе вѣса раціональной фермы 1-го класса

$$n = \frac{l}{7},$$

гдѣ $l$ — въ фут., при взятыхъ нами нагрузкахъ, подъемѣ фермы и при разстояніи между стропилами въ 7 фут., получимъ:

вѣсъ полуфермы 1-го класса *раціональной* системы

$$V = 0{,}3 \cdot l + 0{,}011 \cdot l^2 + 0{,}00005 \cdot l^3 \quad \ldots\ldots \quad \textbf{63,}$$

гдѣ $V$ — въ пуд., а $l$ — въ фут.

Обращаясь теперь къ формулѣ вѣса раціональной фермы 2-го класса, не трудно видѣть, что здѣсь число панелей оказываетъ незначительное вліяніе на возрастаніе вѣса. Пренебрегая для краткости разсужденій этимъ вліяніемъ вовсе, придемъ къ тому, что здѣсь число панелей зависитъ отъ вѣса стыка и вѣса матеріала балки, выносящей на себѣ сгибающее дѣйствіе силъ.

Принимая вѣсъ стыковъ на панель въ 1 пудъ и вѣсъ балки пояса по формулѣ **58,a**, изъ выраженія 1-й производной отъ $Z$ по $n$, обращеннаго въ нуль, найдемъ для *раціональной* фермы 2-го класса:

$$n = l \cdot \sqrt{0{,}022} = 0{,}15 \cdot l \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{64}.$$

Слѣдовательно, величина панели выходитъ здѣсь равною

$$a = \frac{l}{n} = 6{,}6 \text{ фут.}$$

Взявши $n = l : 6{,}6$, гдѣ $l$ — въ фут.

$e = 7$ фут.

и принявши тѣ же данныя, что и ранѣе, относительно нагрузокъ и подъема крыши, получимъ:

вѣсъ полуфермы 2-го класса раціональной системы

$$V = 0{,}25 \cdot l + 0.01446 \cdot l^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{65}$$

гдѣ $V$ — въ пуд., а $l$ — въ фут.

Вѣса полуфермъ остальныхъ системъ также могутъ быть приведены къ формуламъ, подобнымъ **63** и **65**. Не останавливаясь на этомъ, замѣтимъ только, что *наивыгоднѣйшее значеніе $n$ во всѣхъ разсмотрѣнныхъ здѣсь фермахъ 1-го класса одинаково.*

Предыдущія разсужденія велись въ предположеніи, что обрѣшетина передаетъ дѣйствіе нагрузки непосредственно на верхній поясъ фермы. Въ случаѣ устройства прогоновъ верхній поясъ не будетъ испытывать на себѣ сгибающаго дѣйствія силъ, а потому вышеприведенный способъ опредѣленія $n$ здѣсь надо будетъ примѣнить къ отысканію наивыгоднѣйшей комбинаціи вѣса стропилъ и вѣса обрѣшетины.

Въ случаѣ существованія прогоновъ величину панели также нельзя дѣлать болѣе 7 фут., такъ какъ при этомъ возрастаніе вѣса обрѣшетины и ея стоимости идетъ быстрѣе, чѣмъ уменьшеніе вѣса стропилъ, обусловливаемое уменьшеніемъ числа панелей. Кромѣ того, если дать панели большіе размѣры, то верхній поясъ будетъ имѣть болѣе длинныя сжимающіяся части, и это вызоветъ возрастаніе поправочнаго коэффиціента пояса сжатія.

Къ тѣмъ же числовымъ величинамъ длины панели (отъ 6 до 8 фут.) придемъ и въ случаѣ желѣзной обрѣшетины. Исключеніе составитъ только случай употребленія волнистаго желѣза въ качествѣ кровельнаго матеріала, когда принятые размѣры его таковы, что оно можетъ выносить обычную нагрузку на разстояніи 10 — 12 фут. Въ этомъ случаѣ и длину панелей также слѣдуетъ брать отъ 10 до 12 фут.

Если въ стропилахъ нижній поясъ не горизонталенъ, а имѣетъ слабый уклонъ, то поправка въ опредѣленіи наивыгоднѣйшаго расположенія панелей выходитъ очень незначительна, но вѣсъ стропилъ значительно возрастаетъ, такъ какъ вмѣсто величины $f$ подъема крыши въ формулы усилій и вѣса войдетъ разность подъемовъ верхняго и нижняго поясовъ.

## Разсчетъ прямолинейной и параболической фермъ безъ раскосовъ въ случаѣ дѣйствія сосредоточенной нагрузки.

Сосредоточенными нагрузками являются въ заводскихъ зданіяхъ контръ-шафты приводовъ, привѣсы подъемныхъ механизмовъ для установки обрабатываемыхъ предметовъ и т. п.

Если въ точкѣ $D$, отстоящей от опоры $A$ (фиг. 1 и 2) на разстояніи $z$ дѣйствуетъ сосредоточенный грузъ $P$, то въ произвольномъ сѣченіи, имѣющемъ координаты $x$ и $y$ и лежащемъ между точками $A$ и $D$ моментъ будетъ

$$M_1 = V_1 \,.\, x - H \,.\, y,$$

а въ сѣченіи, лежащемъ между $D$ и $B$, выраженіе момента напишется такъ:

$$M_2 = V_2\,(2l - x) - H \,.\, y \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{66.}$$

При этомъ

$$V_1 = P \,.\, \frac{2l - z}{2l}$$

$$V_2 = P \,.\, \frac{z}{2l}$$

$$H = P \,.\, \frac{z}{2f} \,.$$

Зависимость между $y$ и $x$ въ прямолинейной фермѣ будетъ

$$y = \frac{f}{l} \cdot x,$$

а въ параболической она дается уравненіемъ **5**:

$$y = f \,.\, \frac{2l \,.\, x - x^2}{l^2} \,.$$

Внося эти значенія въ выраженія для $M_1$ и $M_2$, будемъ имѣть для прямолинейной фермы между $A$ и $C$ (фиг. 1):

$$M_1 = P \,.\, x \,.\, \frac{l - z}{l}$$

$$M_2 = P \,.\, z \,.\, \frac{l - x}{l} \,.$$

А между сѣченіями $C$ и $B$, гдѣ

$$y = f \,.\, \frac{2l - x}{l},$$

ур-іе **66** обращается въ нуль.

Для параболической фермы

$$M_1 = P \,.\, x \,.\, \frac{l - z}{l} - P \,.\, x \,.\, z \,.\, \frac{l - x}{2l^2}$$

$$M_2 = P \,.\, z \,.\, \frac{l - x}{l} - P \,.\, x \,.\, z \,.\, \frac{l - x}{2l^2} \,.$$

Не трудно видѣть, что $M_1$ и $M_2$ для прямолинейной фермы будутъ положительны для всякаго $x$ при произвольномъ $z$; для параболической же фермы оба момента могутъ быть и положительны, и отрицательны. Положительными моментами въ разсматриваемомъ случаѣ будутъ тѣ, которые, деформируя балку, приближаютъ ее къ горизонтали $AB$, а отрицательными — тѣ, которые при деформаціи удаляютъ ось балки отъ горизонтали $AB$.

Положительныя значенія $M_1$ для параболической фермы меньше, чѣмъ для прямолинейной, при произвольномъ $z$ и для всѣхъ $x$.

Отрицательное значеніе $M_1$ можетъ быть для параболической фермы только въ случаѣ

$$z \text{ болѣе } \frac{2}{3}\, l.$$

Наибольшій положительный моментъ получается въ сѣченіи $x = z$, и величина его будетъ:

для прямой

$$M_1 = M_2 = P \,.\, z \,.\, \frac{l - z}{l} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{67}$$

для параболы

$$M_1 = M_2 = P \,.\, z \,.\, \frac{l - z}{l} \cdot \frac{2l - z}{2l},$$

т. е. *наибольшій положительный моментъ для параболической фермы меньше, чѣмъ для прямолинейной.*

Взявъ въ случаѣ параболы 1-ю производную отъ $M_2$ по $x$ и приравнявъ ее нулю, получимъ

$$x = \frac{3}{2}\ l \quad \text{и}$$

$$max.\ M_2 = -P \cdot \frac{z}{8} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ \mathbf{68.}$$

Слѣдовательно, если сосредоточенный грузъ дѣйствуетъ на лѣвую ногу параболической фермы, то наибольшій моментъ вызовется лишь въ правой ногѣ, и онъ будетъ равенъ

$$-\frac{P.z}{8}.$$

Въ прямой фермѣ въ сѣченіяхъ ненагруженной ея ноги моментъ $= O$.

Наибольшее отрицательное значеніе $M_1$ въ параболической фермѣ можетъ имѣть мѣсто только

$$\text{при } z \text{ болѣе } \frac{2}{3}\ l.$$

Координата этого сѣченія получится, взявъ 1-ю производную отъ $M_1$ по $x$ и приравнявъ ее нулю, что даетъ

$$x = \frac{3z - 2l}{2z} \cdot l \cdot$$

При этомъ значеніи $x$ получимъ

$$max.\ M_1 = -\frac{P}{8z} \cdot (3z - 2l)^2.$$

Эта величина $max.\ M_1$ будетъ для всѣхъ значеній $z$ менѣе $max.\ M_2$, и только въ случаѣ груза, подвѣшеннаго въ вершинѣ параболы, обѣ эти величины будутъ равны.

Сравнивая разсчетные моменты для прямолинейной и параболической фермы, выражаемые формулами **67—68**, видимъ, что они будутъ одинаковы при $z = \frac{8}{9} \cdot l.$

Слѣдовательно, *если сосредоточенный грузъ приложенъ на разстояніи* $\frac{8}{9} l$ *отъ опоры, то моментъ, по которому надо разсчитывать прямолинейную ферму и параболическую, будетъ одинаковъ.*

При $z$ менѣе $\frac{8}{9} l$ моментъ въ параболической фермѣ меньше, чѣмъ въ прямой, при $z$ болѣе $\frac{8}{9} l$ — обратно.

Въ практикѣ, при устройствѣ мастерскихъ, никогда не приходится нагружать стропила сосредоточенными грузами близко къ вершинѣ фермы.

Если же предвидится возможность перемѣщать сосредоточенный грузъ по всему пролету, то параболическая ферма будетъ легче прямой.

Для послѣдней въ этомъ случаѣ получимъ при $z = \frac{l}{2}$

$$max.\, M_1 = P \cdot \frac{l}{4}.$$

а для параболы при $z = 0{,}423 \cdot l$.

$$max.\, M_1 = \frac{P \cdot l}{5}.$$

Въ случаѣ двухъ грузовъ, симметрично расположенныхъ, получимъ:

для параболы

$$M_1 = P \cdot x\left(1 - \frac{2z}{l} + \frac{xz}{l^2}\right)$$

$$M_2 = P \cdot z\left(\frac{l - x}{l}\right)^2,$$

а для прямой — выраженія $M_1$ и $M_2$ остаются тѣ же, что и при одномъ грузѣ.

# АРОЧНЫЯ

## параболическія фермы.

### Вѣсъ параболической фермы безъ раскосовъ и наклонныхъ тягъ.

Равномѣрно распредѣленная по всему пролету нагрузка не вызываетъ въ параболической аркѣ сгибающихъ моментовъ, слѣдовательно, при такой нагрузкѣ нѣтъ надобности ставить раскосы, имѣющіе цѣлію уменьшить величину сгибающаго момента.

Натяженіе тяги (см. формулу **1**) было найдено равнымъ

$$H = \frac{q \cdot l^2}{2f}.$$

Слѣдовательно, вѣсъ половины тяги будетъ

$$q \cdot \frac{l^3}{2f} \cdot \frac{\gamma}{k}.$$

Сжатіе арки въ произвольномъ сѣченіи (см. формулу **15**) будетъ:

$$S = H \cdot Cos\,\alpha + (V_1 - q \cdot x) \cdot Sin\,\alpha,$$

гдѣ $V_1 = q \cdot l$ — давленіе на опору.

Длина элемента дуги кривой есть $dx : Cos\,\alpha$, и вѣсъ пояса сжатія полуфермы будетъ

$$V_s = \frac{\gamma \cdot \beta}{k} \int_0^l [H + q(l - x) \cdot tg\alpha] \cdot dx.$$

Предполагая, что параболическая ферма выполнена раціонально, т. е. удовлетворяетъ уравненію **5** (см. стр. 8-ю),

$$y = f \cdot \frac{2l \cdot x - x^2}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{5},$$

найдемъ

$$tg\,\alpha = \frac{dy}{dx} = 2f \cdot \frac{l-x}{l^2}$$

$$V_s = \frac{q \cdot l^3}{2f} \cdot \frac{\beta \,.\, \gamma}{k}\left(1 + \frac{4f^2}{l^2}\right).$$

Вводя обозначеніе, отмѣченное формулой **49** и не принимая въ разсчетъ сѣкущихъ усилій, общій вѣсъ половины арочной фермы получимъ въ такомъ видѣ:

$$V = \Phi \cdot \left[1 + \beta\left(1 + 4\frac{f^2}{l^2}\right)\right] \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{69.}$$

## Параболическія фермы съ раскосами.

### Выгодность замѣны раскосовъ системою наклонныхъ тягъ

При односторонней нагрузкѣ ($p$ на 1 длины) въ параболическихъ аркахъ появляются сгибающіе моменты.

Уменьшеніе этихъ послѣднихъ можетъ быть достигнуто здѣсь такъ же, какъ и въ прямолинейныхъ фермахъ, т.-е. постановкою раскосовъ.

Какъ опредѣленіе усилій въ раскосахъ, такъ и отысканіе наивыгоднѣйшаго ихъ направленія, подъ условіемъ наименьшаго вѣса фермы, можетъ быть выполнено и здѣсь по тому же самому способу, какъ и ранѣе, въ случаѣ прямолинейныхъ фермъ.

При односторонней нагрузкѣ полупролета давленіе на опоры будетъ

$$V_1 = \frac{3}{4} \cdot p\,l$$

$$V_2 = \frac{1}{4} \cdot p\,l.$$

Моментъ внѣшнихъ силъ въ произвольной точкѣ ($x\ y$) нагруженной стороны арки будетъ

$$M = \frac{3}{4} p \cdot l \cdot x - \frac{1}{2} \cdot p \cdot x^2.$$

Для точки $r$ (фиг. 10) въ $m$-ой панели,

при $$x = m \cdot a = m \cdot \frac{l}{n}.$$

$$M_m = \frac{1}{4} \cdot p \cdot l^2 \cdot \frac{3\,m \cdot n - 2\,m^2}{n^2} \quad \ldots \ldots \ldots \; \mathbf{70.}$$

Разстояніе точки $r$ отъ пояса растяженія по уравненію параболы (см. форм. **5**) будетъ:

$$h_m = f \cdot a^2 \cdot \frac{2\,m \cdot n - m^2}{l^2}.$$

Натяженіе нижняго пояса въ $m$-ой панели

$$t_m = M_m : h_m = \frac{p \cdot l^2}{4\,f} \cdot \frac{3\,n - 2\,m}{2\,n - m}$$

Натяженіе нижняго пояса въ $(m + 1)$-ой панели

$$t_{m+1} = M_{m+1} : h_{m+1} = \frac{p \cdot l^2}{4\,f} \cdot \frac{3\,n - 2\,m - 2}{2\,n - m - 1}.$$

Разность натяженій, по которой опредѣляютъ сжатіе и растяженіе соотвѣтственныхъ раскосовъ и тягъ, будетъ

$$t_m - t_{m+1} = \frac{p \cdot l^2}{4\,f} \cdot \frac{n}{(2\,n - m)(2\,n - m - 1)} \quad \ldots \; \mathbf{71.}$$

При перемѣщеніи нагрузки съ одной половины фермы на другую, моментъ внѣшнихъ силъ въ той же точкѣ $(x,\; y)$ будетъ:

$$M_m = V_2 \cdot x = \frac{1}{4} \cdot p \cdot l \cdot x = \frac{1}{4} \cdot p \cdot l^2 \cdot \frac{m}{n}$$

$$t_m = \frac{p \cdot l^2}{4 \cdot f} \cdot \frac{n}{2\,n - m}$$

$$t_{m+1} = \frac{p \cdot l^2}{4 \cdot f} \cdot \frac{n}{2\,n - m - 1}.$$

А разсчетная разность натяженій будетъ:

$$t_m - t_{m+1} = -\frac{p \cdot l^2}{4\,f} \cdot \frac{n}{(2\,n - m)(2\,n - m - 1)} \quad \ldots \; \mathbf{72,}$$

т.-е. *при перенесеніи нагрузки съ одной стороны фермы на другую, разность натяженій нижняго пояса въ двухъ смежныхъ панеляхъ мѣняетъ только знакъ, не измѣняя своей величины.*

Такъ какъ при разсчетѣ фермы необходимо разсматривать случай нагрузокъ на каждой ея половинѣ, поэтому каждый раскосъ будетъ подвергаться дѣйствію одинаковыхъ усилій растяженія и сжатія, смотря по положенію неравномѣрной нагрузки.

Разность въ усиліяхъ поясовъ двухъ смежныхъ панелей отъ односторонней нагрузки, сравнительно съ полной величиною усилія въ поясахъ отъ постоянной нагрузки, настолько невелика, что при отысканіи наивыгоднѣйшаго расположенія раскосовъ можно ограничиться задачею— отыскать такое расположеніе раскосовъ, при которомъ *ихъ вѣсъ* былъ бы *min*.

Разлагая подобно тому, какъ это дѣлалось для прямолинейныхъ фермъ, разность усилій $t_m - t_{m+1}$ по направленію $c$ и $d$ (фиг. 10), получимъ слѣдующее:

если на раскосъ $c$ дѣйствуетъ сжимающее (или растягивающее) усиліе

$$Q \cdot \frac{c}{a},$$

то на раскосъ $d$ будетъ дѣйствовать растягивающее (или сжимающее), т. е. обратное усиліе, величина котораго будетъ

$$Q \cdot \frac{o\,i}{a},$$

гдѣ по фиг. 10

$$\frac{o\,i}{o\,e} = h_m : h_{m+1}.$$

Вѣсъ раскоса $c$ будетъ пропорціоналенъ

$$Q \cdot \frac{c^2}{a}.$$

Вѣсъ раскоса $d$ будетъ пропорціоналенъ

$$Q \; \frac{d^2}{a} \cdot h_m : h_{m+1}.$$

Но

$$c^2 = x^2 + h_m^2.$$

$$d^2 = (a-x)^2 + h_{m+1}^2.$$

Слѣдовательно, *вѣсъ двухъ раскосовъ данной панели* будетъ пропорціоналенъ величинѣ

$$L = x^2 + h_m^2 + \frac{h_m}{h_{m+1}}\left[(a-x)^2 + h_{m+1}^2\right]. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{73}.$$

Взявши 1-ю производную отъ $L$ по $x$ и приравнявъ ее нулю, получимъ послѣ алгебраическаго преобразованія, что:

$$\frac{x}{h_m}=\frac{a-x}{h_{m+1}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \mathbf{74,}$$

т. е. *тіп вѣса у двухъ раскосовъ данной панели получится тогда, когда оба они будутъ наклонены къ поясу растяженія подъ одинаковымъ угломъ*, или $\varphi=\varphi_1$ на фиг. 10.

Мы не останавливаемся подробно на развитіи полнаго рѣшенія вопроса о наивыгоднѣйшемъ проведеніи раскосовъ въ параболической фермѣ стропилъ по слѣдующимъ соображеніямъ:

Односторонняя нагрузка на стропильныя фермы представляетъ собою слагающую дѣйствія вѣтра, и величина ея гораздо менѣе постоянной нагрузки, т. е. равномѣрно распредѣленной по всему пролету. Эта постоянная нагрузка состоитъ изъ вѣса стропилъ, обрѣшетины и подшивки, кровельнаго матеріала и вѣса снѣга. Постоянная же нагрузка не вызываетъ натяженій въ раскосахъ параболической арки, но она даетъ наибольшія усилія въ поясахъ. Слѣд., раскосы въ этихъ аркахъ надо разсчитывать по сравнительно малой величинѣ односторонней нагрузки, и если принять въ соображеніе, что длина раскосовъ сжатія въ аркахъ будетъ больше, чѣмъ въ прямолинейныхъ фермахъ, то сдѣлается яснымъ, что употребленіе сжатыхъ частей большой длины при слабыхъ усиліяхъ повлечетъ за собою слишкомъ невыгодное употребленіе матеріала. Въ этомъ случаѣ замѣна раскосовъ системою *тягъ* или *хордъ*, связывающихъ разныя точки дуги съ ея подошвами, представитъ значительныя выгоды, какъ по экономіи матеріала, такъ и по простотѣ работы.

Если при составленіи проекта, для большей надежности разсчета раскосовъ, сдѣлать предположеніе, что часть снѣга лежитъ на одной сторонѣ фермы, то и въ этомъ случаѣ постановка системы тягъ будетъ выгоднѣе устройства раскосовъ, такъ какъ пояса фермъ должны быть разсчитаны, предполагая распредѣленіе нагрузки отъ снѣга по всему пролету.

Поясимъ сказанное простымъ примѣромъ на четыреугольной прямолинейной фермѣ (фиг. 11).

Пусть узлы ея $B$ и $D$ воспринимаютъ одинаковую нагрузку $Q$, подъ дѣйствіемъ которой части $AB$, $BD$ и $DE$ будутъ сжиматься, а часть $AE$ будетъ растягиваться. Теоретически такая ферма остается въ покоѣ и безъ хордъ и безъ раскосовъ.

Снимемъ часть $P$ нагрузки съ узла $D$, тогда усиліе $P$ на узлѣ $B$, равное снятой части груза съ узла $D$, потребуетъ (для сохраненія равновѣсія фермы) устройства или раскосовъ или хорды.

На фиг. 11 представленъ случай употребленія раскосовъ, а на фиг. 12 дано примѣненіе тягъ.

Усиліе раскоса $c$ (фиг. 11) равно $P$, вѣсъ его будетъ

$$\frac{\gamma}{k} \cdot \beta \cdot P \cdot h,$$

гдѣ $\beta$ — отношеніе допускаемыхъ напряженій при растяженіи и сжатіи. На тягу $d$ будетъ передано усиліе

$$\frac{1}{3} \cdot P \cdot \frac{d}{h}.$$

Вѣсъ тяги $d$

$$\frac{\gamma}{k} \cdot \frac{1}{3} \cdot P \cdot \frac{d^2}{h} = \frac{\gamma}{k} \cdot \frac{1}{3} \cdot P \cdot \frac{a^2 + h^2}{h}.$$

Сумма вѣсовъ раскоса $c$ и тяги $d$ будетъ

$$V_1 = \frac{\gamma}{k} \cdot \frac{a^2 + h^2 + 3\beta \cdot h^2}{3h} \cdot P. \quad \ldots\ldots\ 75.$$

Вопросъ объ измѣненіяхъ усилій сжатія и растяженія частей $AB$, $BD$, $DE$ и $EA$ не разсматриваемъ, такъ какъ эти части должны быть разсчитаны по наибольшимъ и одинаковымъ нагрузкамъ $Q$.

Въ случаѣ примѣненія тяги $AD$ (фиг. 12) вмѣсто раскосовъ, она будетъ имѣть натяженіе

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{P}{h} \cdot d_1$$

и ея вѣсъ будетъ

$$V_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\gamma}{k} \cdot \frac{P}{h} \cdot d_1^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\gamma}{k} \cdot P \cdot \frac{4a^2 + h^2}{h} \quad \ldots\ldots\ 76.$$

Разность вѣсовъ

$$V_1 - V_2 = \frac{\gamma}{k} \cdot P \cdot \frac{\beta \cdot h^2 - a^2}{h}.$$

При обыкновенныхъ данныхъ для разсчета стропилъ величина $\beta$ выходитъ не менѣе $3$*), и разность $V_1 - V_2$ будетъ въ пользу устройства хорды, если подъемъ фермы составляетъ отъ $\frac{1}{5}$ до $\frac{1}{6}$ ея пролета. Кромѣ того, при хордѣ избѣгается матеріалъ и работа стыковъ въ узлахъ $B$ и $B_1$ (фиг. 11 и 12).

Замѣна раскосовъ хордами въ арочныхъ фермахъ значительно упрощаетъ работу по изготовленію послѣднихъ. Прикрѣпленіе хорды къ тѣлу дуги арки (одинъ болтъ) гораздо проще стыка раскосовъ и поясовъ обыкновеннаго типа. Кромѣ того, какъ увидимъ далѣе, хорды даютъ возможность гораздо легче разбить арку на части равнаго сопротивленія по отношенію къ сгибающимъ моментамъ.

Насколько намъ извѣстно, въ технической литературѣ до сихъ поръ еще не появилось разсчета арочныхъ стропильныхъ фермъ со многими тягами, а потому въ дальнѣйшемъ мы остановимся болѣе подробно на теоретической части такого разсчета. Но прежде чѣмъ дать рѣшеніе общей задачи при $n$ хордахъ, пояснимъ ходъ разсчета при трехъ тягахъ. Такой пріемъ облегчитъ читателю трудъ — прослѣдить алгебраическую часть рѣшенія вопроса объ $n$ хордахъ.

---

*) Для примѣра возьмемъ

$$h = 5 \text{ фут.} = 60 \text{ дм.}, \quad a = 10 \text{ фут.}, \quad AE = 30 \text{ фут.};$$

примемъ одностороннюю нагрузку отъ дѣйствія вѣтра и части снѣга около 0,28 пуд. на 1 кв. фут. При разстояніи между фермами въ 7 фут., получимъ

$$P = 0{,}28 \cdot 7 \cdot 10 = 20 \text{ пуд.}$$

Если взять самый малый уголокъ $1 \times 1 \times \frac{1}{8}$ дм., то для него отношеніе длины къ наименьшей ширинѣ сѣченія выходитъ 60, и поправочный коэффиціентъ сжатія по форм. *Loewe* (см. таб. 13 изъ табл. Бѣлелюбскаго и Богуславскаго, изданіе 3-е, 1894) выходитъ 0,3. Поперечное сѣченіе уголка—около $\frac{1}{4}$ кв. дм. Усиліе, отнесенное къ сѣченію въ 1 кв. дм., будетъ

$$20 : \frac{1}{4} = 80 = k_1,$$

а напряженіе матеріала длинной стойки будетъ $80 : 0{,}3 =$ около 270 пуд. Слѣдов., брать желѣзо еще меньшихъ размѣровъ уже нельзя. Въ случаѣ тяги, независимо отъ размѣровъ ея сѣченія, можно принять напряженіе матеріала при растяженіи равнымъ $k = 350$ пуд. и

$$\beta = k : k_1 = 350 : 80 = 4{,}3.$$

# Арочныя фермы съ тремя тягами.

## Опредѣленіе натяженій тягъ.

Фиг. 13 изображаетъ схему арочной фермы съ 3-мя тягами, одной горизонтальной $AB$ и двумя наклонными $AC_1$ и $BC$, т.-е. съ 4-мя шарнирами $A$, $B$, $C$ и $C_1$. Расположеніе частей — симметричное, т.-е.

$$AD = BD_1 = a$$

$$CD = C_1 D_1 = h.$$

Для всякаго дѣйствующаго на арку груза $P$, приложеннаго на разстояніи $x$ отъ опоры $A$, можно опредѣлить натяженіе тягъ на основаніи ур-ія моментовъ.

Обозначимъ чрезъ

$H_0$ — натяженіе тяги $AB$

$T$ — „ „ $BC$

$T_1$ — „ „ $AC_1$

$V_1$ — $V_2$ — давленія на опоры $A$ и $B$.

Сумма моментовъ относительно точки $C_1$ даетъ

$$V_2 \cdot a = T \cdot C_1 E_1 + H_0 \cdot C_1 D_1,$$

а относительно точки $C$

$$V_2 (2l - a) = T_1 \cdot CE + H_0 \cdot CD.$$

Если нагрузка $P$ будетъ приложена между узлами $C$ и $C_1$ на разстояніи $x_1$ отъ опоры $A$, то:

$$V_2 \cdot a = T \cdot C_1 E_1 + H_0 \cdot C_1 D_1$$

$$V_1 \cdot a = T_1 \cdot CE + H_0 \cdot CD.$$

Для опредѣленія трехъ неизвѣстныхъ $T$, $T_1$ и $H_0$ этихъ двухъ ур-ній недостаточно.

Третье ур-іе получается изъ геометрическаго разсмотрѣнія положенія груза $P$.

Такъ, напр., для всякаго груза, приложеннаго между $A$ и $C$ (фиг. 13), натяженіе тяги $BC$ —

$$T = 0,$$

такъ какъ въ это время дуга $ACC_1$ будетъ сжата, и точка $C$ отклонится вправо.

Такимъ же разсмотрѣніемъ можно опредѣлить относительное значеніе натяженія тягъ $BC$ и $C_1A$ въ зависимости отъ положенія нагрузки между узлами $C$ и $C_1$. Очевидно, что для грузовъ, приложенныхъ между точкою $C$ и $G$, т.-е. вершиною арки, тяга $BC$ можетъ быть выкинута, или для нея $T = 0$.

Такимъ же путемъ можно опредѣлить натяженіе тягъ и при произвольномъ ихъ числѣ. Если дано $n$ тягъ, то всегда получится $(n-1)$ ур-іе моментовъ, и одно условіе найдется изъ геометрическаго разсмотрѣнія положенія дѣйствующаго груза.

Пусть $H$ и $H_1$ будутъ горизонтальныя слагающія натяженій $T$ и $T_1$, тогда для удобства вывода можно сдѣлать замѣну:

$$T \cdot C_1E_1 = H \cdot C_1K_1 = H \cdot z$$

$$T_1 \cdot CE = H_1 \cdot CK = H_1 \cdot z.$$

Когда найдены усилія для тягъ, тогда можно составить ур-іе моментовъ относительно произвольнаго сѣченія арки, изъ котораго и опредѣлится сгибающій моментъ въ этомъ сѣченіи.

Пусть на параболическую арку (фиг. 14) дѣйствуетъ равномѣрно распредѣленная нагрузка, величина которой на 1 длины пролета будетъ $p$. При разсчетѣ стропилъ ведутъ его, предполагая, что нагрузка распространяется отъ одной изъ опоръ до средины арки, напр. отъ $A$ до $N$. Величина этой нагрузки будетъ $p \cdot l$, если длина пролета $= 2\,l$.

Ур-іе параболы $ANB$, отнесенное къ началу координатъ въ точкѣ $A$, было представлено формулой **5** (см. стр. 8 и 59), поэтому мы будемъ имѣть (см. фиг. 14):

$$h = f \cdot \frac{2\,l \cdot a - a^2}{l^2}$$

$$z = h - \frac{a \cdot h}{2\,l - a} = 2\,a \cdot f \cdot \frac{l - a}{l^2}.$$

Давленія на опоры

$$V_1 = \frac{3}{4} \cdot p \cdot l \qquad V_2 = \frac{1}{4} \cdot p \cdot l.$$

Для принятаго нами расположенія нагрузки тяга $BC$ можетъ отсутствовать, т.-е. $T=0$.

Принимая точку $C_1$ за центръ моментовъ, пишемъ

$$V_2 \cdot a = H_0 \cdot h,$$

откуда

$$H_0 = \frac{1}{4f} \cdot \frac{pl^3}{2l-a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 77.$$

Взявъ моменты всѣхъ силъ въ сѣченіи арки, проходящемъ чрезъ точку $C_1$ найдемъ:

$$V_1 \cdot a - \frac{p \cdot a^2}{2} = H_0 \cdot h + H_1 \cdot z,$$

откуда:

$$H_1 = \frac{(V_1 - V_2).a - \frac{p a^2}{2}}{2a(l-a)} \cdot \frac{l^2}{f} = \frac{1}{4} p \cdot \frac{l^2}{f} \quad \ldots\ldots \quad 78,$$

т.-е. *горизонтальная слагающая натяженія тяги $AC_1$ при распредѣленіи равномѣрной нагрузки на половинѣ параболической фермы не зависитъ отъ величины* $a$ *и будетъ одинакова при всѣхъ положеніяхъ тяги.*

Въ предѣльномъ случаѣ, когда $a=0$, т.-е. въ случаѣ одной горизонтальной тяги, натяженіе ея при нагрузкѣ половины фермы будетъ выражаться тою же формулою **78**, которая совершенно тождественна съ выведенною нами ранѣе формулою **6**.

*Примѣчаніе.* При равномѣрной нагрузкѣ всего пролета параболической фермы, тяги $BC$ и $C_1A$ не испытываютъ натяженія; тогда все оно передается на нижнюю тягу, которая будетъ натянута съ усиліемъ

$$H_0 = \frac{q \cdot l^2}{2f},$$

какъ это было найдено при выводѣ формулы **1**.

## Опредѣленіе сгибающихъ моментовъ въ аркѣ съ 3 тягами и наивыгоднѣйшаго расположенія тягъ.

Въ произвольномъ сѣченіи $D$ (фиг. 14), отстоящемъ на разстояніи $x$ отъ опоры $A$ и лежащемъ между $A$ и $N$, т.-е.

при $x$ отъ $O$ до $l$

$$M = V_1 \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2} - H_1 \cdot u - H_0 \cdot y,$$

гдѣ $H_0$ и $H_1$ должны быть взяты по формуламъ **77** и **78**, а

$$u = y - \frac{h \cdot x}{2l - a} = f \cdot \frac{2lx - x^2 - a \cdot x}{l^2}.$$

Внося эти величины въ выраженіе $M$, послѣ преобразованій получимъ:

$$M = \frac{1}{4} \cdot p \cdot \frac{x(a-x)(l-a)}{2l-a} \quad . \quad . \qquad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{79}.$$

При $\qquad x = 0$ и при $x = a \; . \; . \; . \; . \; . \; M = 0.$

Въ части арки $AC$ наибольшее значеніе момента будетъ при $x = \frac{a}{2}$, какъ это видно изъ ур-ія

$$\frac{dM}{dx} = 0.$$

Для сѣченія $F$ (фиг. 15)

$$max \cdot M = \frac{1}{16} \cdot p \cdot \frac{a^2 . l - a^3}{2l - a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{80}.$$

Отъ точки $A$, гдѣ $M = 0$, моментъ возрастаетъ до $max$ въ точкѣ $F$ при $x = \frac{a}{2}$, затѣмъ онъ уменьшается и въ точкѣ $C$ снова $M = 0$. Далѣе между $C$ и $N$ моментъ дѣлается отрицательнымъ, т.-е. изгибъ арки идетъ въ противоположномъ направленіи, и въ точкѣ $N$, гдѣ $x = l$,

$$M_0 = -\frac{1}{4} \cdot pl \cdot \frac{(l-a)^2}{2l-a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{81}.$$

Для части дуги $C_1 N$ моментъ въ произвольномъ сѣченіи $D_1$ будетъ

$$M_1 = V_2(2l - x) - H_0 . y - H_1 . u.$$

Тождественныя съ предыдущими преобразованія дадутъ

$$M_1 = \frac{1}{4} p \cdot \frac{x(a-x)(l-a)}{2l-a} + \frac{p}{2}(l-x)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{81,a},$$

гдѣ $x$ берется отъ $l$ до $(2l - a)$. 81,a.

Въ точкѣ $N$, т. е. при $x = l$, ур-іе **82** даетъ величину $M_0$ (см. форм. **81**), а

при $\qquad x = 2l - a \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; M_1 = 0.$

Наибольшее значеніе $M_1$ получится при значеніи

$$x_1 = l_1 = \frac{8l^2 - 5l \,.\, a + a^2}{6l - 2a},$$

которое найдемъ изъ условія

$$\frac{d\,M_1}{d\,x_1} = 0.$$

Тогда въ сѣченіи $F_1$ (фиг. 15)

$$max\,M_1 = -\frac{1}{4} \cdot p \cdot \left(2\,l^2 + l_1^2 \cdot \frac{3l - 2a}{2l - a}\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{82.}$$

Слѣдовательно, переходя отъ $N$ къ $C_1$, мы имѣемъ все время отрицательное значеніе момента; между $N$ и $F_1$ получается сначала увеличеніе момента, а затѣмъ величина его уменьшается и дѣлается $= O$ въ $C_1$ при $x_1 = 2l - a$.

Для части $BC_1$ арки моментъ въ произвольномъ сѣченіи ея $D_2$ (фиг. 14) будетъ:

$$M_2 = V_2\,(2\,l - x_2) - H_0 \cdot y_2,$$

гдѣ $x$ измѣняется отъ $(2l - a)$ до $2l$.

Послѣ преобразованія предыдущее равенство получитъ такой видъ:

$$M_2 = \frac{1}{4} \cdot p \cdot l \cdot \frac{(2l - x)(2l - a - x)}{2l - a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{83.}$$

При $x = 2l - a$ и при $x = 2l \ldots\ldots M_2 = 0$.

Наибольшее значеніе $M_2$ получится при значеніи

$$x_2 = 2\,l - \frac{a}{2},$$

которое найдемъ изъ условія

$$\frac{d\,M_2}{d\,x_2} = 0.$$

15

Въ сѣченіи $F_2$ (фиг. 14) будемъ имѣть

$$max.\,M_2 = -\frac{1}{16} \cdot p \cdot l \cdot \frac{a^2}{2l - a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{84.}$$

Слѣдовательно, на протяженіи дуги $B\,C_1$ моментъ остается отрицательнымъ; въ точкахъ $B$ и $C_1$ онъ равенъ нулю, а наибольшаго значенія онъ достигаетъ въ сѣченіи $F_2$, на разстояніи $\frac{a}{2}$ отъ опоры $B$, т. е. *наибольшіе сгибающіе моменты, положительный въ части* $AC$ *параболической фермы и отрицательный въ части* $C_1B$ *относятся къ сѣченіямъ* $F$ *и* $F_2$ *(фиг. 15), отстоящимъ отъ опоръ на равныхъ разстояніяхъ.*

Выгибъ арки въ зависимости отъ измѣненія моментовъ, изслѣдованнаго нами, представленъ на фиг. 15 толстымъ пунктиромъ.

Для арки съ тремя тягами мы получили 3 выраженія $max.\ M$, представляемыя формулами **80**, **82** и **84**. Не трудно видѣть, что

$$max.\, M_2 \text{ всегда больше } max.\, M.$$

Для наивыгоднѣйшаго распредѣленія матеріала, сопротивляющагося сгибающимъ усиліямъ, необходимо, чтобы существовало равенство

$$max.\, M_1 = max.\, M_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{85}.$$

Удовлетворяя этому условію, найдемъ

$$a = 0{,}68\,.\,l, \text{ или около } \frac{2}{3}\,l \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{86},$$

причемъ

$$max.\, M_1 = max.\, M_2 = -\,0{,}022\,.\,p\,.\,l^2. \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{87},$$

$$max.\, M = +\,0{,}0072\,.\,p\,.\,l^2. \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{87{,}a}.$$

Въ случаѣ арки съ одною горизонтальною тягою, полупролетъ которой нагруженъ равномѣрно, моменты выражались формулами **8** и **12**. Наибольшее ихъ значеніе получалось на разстояніи $\frac{l}{2}$ отъ опоръ и было (см. форм. **11** и **13**):

$$max.\, M_1 = \frac{1}{16}\cdot p\cdot l^2 = 0{,}00625\cdot p\cdot l^2 \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{11}$$

$$max.\, M_2 = -\,0{,}00625\,.\,p\,.\,l^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{13}$$

Эти формулы, по сравненію ихъ съ **87**, показываютъ, что

*въ параболической аркѣ съ 3 тягами, расположенными наивыгоднѣйшимъ образомъ, разсчетный сгибающій моментъ почти въ 3 раза меньше, чѣмъ для арки съ одною тягою.*

## Усилія сжатія въ аркахъ съ тремя тягами и съ одной.

Разсмотримъ отдѣльно усилія сжатія въ аркахъ:

1) при нагрузкѣ $q \cdot 2\,l$, равномѣрно распредѣленной по всей длинѣ арки и

2) при односторонней нагрузкѣ $p \cdot l$, распредѣленной равномѣрно на половинѣ длины пролета.

На фиг. 16 уголъ касательной въ произвольной точкѣ $D$ съ горизонталью обозначимъ чрезъ $\beta$, а уголъ наклонной тяги съ горизонталью—$\alpha$.

Индексы $p$ и $q$ при усиліяхъ обозначаютъ далѣе зависимость этихъ усилій отъ нагрузокъ $p \cdot l$ и $q \cdot 2\,l$.

Усиліе сжатія отъ нагрузки на всемъ пролетѣ (фиг. 16) будетъ:

$$S_q = V_q \cdot Sin\,\beta + H_{0q} \cdot Cos\,\beta.$$

Усиліе сжатія отъ односторонней нагрузки для нагруженной стороны фермы:

$$S_p = V_p \cdot Sin\,\beta + H_{0p} \cdot Cos\,\beta + T_{1p} \cdot Cos\,(\alpha + \beta),$$

а для ненагруженной стороны фермы

$$S_p = V_{2p} \cdot Sin\,\beta + H_{0p} \cdot Cos\,\beta.$$

Эти сжимающія усилія вызываютъ въ сѣченіяхъ арки добавочныя напряженія къ тѣмъ, которыя получились отъ дѣйствія сгибающихъ моментовъ.

Въ аркѣ съ 3 тягами наибольшіе сгибающіе моменты дѣйствуютъ въ двухъ сѣченіяхъ $F$ и $F_2$ (фиг. 15), отстоящихъ отъ опоръ на разстояніи $\frac{a}{2}$, и въ сѣченіи $F_1$, лежащемъ около вершины арки. Только для этихъ трехъ сѣченій и необходимо опредѣлить напряженія, вызываемыя усиліями сжатія.

Изъ ур-ія 5 мы имѣли

$$tg\,\beta = 2 \cdot f \cdot \frac{l - x}{l^2}.$$

Изъ чертежа (фиг. 14) имѣли ранѣе:

$$tg\,\alpha = \frac{h}{2l - a} = f \cdot \frac{a}{l^2}.$$

Для сѣченія $F$ (фиг. 15) при $x=\frac{a}{2}$

$$tg\ \beta = f\cdot\frac{2l-a}{l^2}\cdot$$

Предполагая подъемъ арки въ $\frac{1}{5}$ ея пролета, получимъ

$$f=\frac{2}{5}\cdot l.$$

Взявши затѣмъ

$$a=\frac{2}{3}l,$$

будемъ имѣть:

| | |
|---|---|
| $Sin\ \beta = 0{,}47$ | $Cos\ \alpha = 0{,}966$ |
| $Cos\ \beta = 0{,}882$ | $tg\ \alpha = 0{,}266$ |
| $tg\ \beta = 0{,}533$ | $Cos\,(\alpha-\beta) = 0{,}97.$ |

Для сѣченія $F$ (фиг. 15):

$$V_q = q\cdot l - q\cdot\frac{a}{2} = 0{,}67\cdot q\cdot l.$$

$$V_p = \frac{3}{4}\cdot p\cdot l - p\cdot\frac{a}{2} = 0{,}42\cdot p\cdot l\cdot$$

Такимъ же образомъ для сѣченія $F_2$ (фиг. 15):

$$V_q = 0{,}67\,.\,q\,.\,l$$

$$V_{2p} = \frac{1}{4}\cdot p\cdot l = 0{,}25\cdot p\cdot l\cdot$$

По формулѣ **87**: 78:

$$T_{1p} = H_{1p} : Cos\ \alpha = \frac{1}{4}\cdot\frac{p\,.\,l^2}{f\,.\,Cos\ \alpha} = 0{,}645\,.\,p\,.\,l.$$

По формулѣ **77**:

$$H_{0p} = \frac{1}{4}\cdot p\cdot\frac{l^3}{f(2l-a)} = 0{,}47\,.\,p\,.\,l.$$

По формулѣ **1**:

$$H_{0q} = \frac{1}{2}\cdot\frac{q\,.\,l^2}{f} = 1{,}25\,.\,q\,.\,l.$$

Вносящ эти данныя въ формулы сжимающихъ усилій, получимъ для обѣихъ половинъ арки:

$$S_q = 1{,}415 \,.\, q \,.\, l$$

для нагруженной стороны арки

$$S_p = 1{,}238 \,.\, p \,.\, l$$

для ненагруженной стороны арки

$$S_p = 0{,}531 \,.\, p \,.\, l.$$

Для вершины арки, гдѣ уголъ $\beta = 0$, получимъ

$$S_q = 1{,}25 \,.\, q \,.\, l$$

$$S_p = 0{,}47 \,.\, pl + 0{,}625 \,.\, p \,.\, l = 1{,}1 \,.\, p \; l.$$

Полное сжимающее усиліе въ опасныхъ сѣченіяхъ арки будетъ:

$$S = S_p + S_q.$$

Для нагруженной стороны арки (сѣченіе $F$ на фиг. 15) получимъ:

$$S = 1{,}415 \,.\, q \,.\, l + 1{,}238 \,.\, p \,.\, l \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{88}$$

для ненагруженной стороны (сѣченіе $F_2$ на фиг. 15):

$$S = 1{,}415 \,.\, q \,.\, l + 0{,}531 \,.\, p \,.\, l \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{89}$$

для вершины арки сѣченіе $N$ (на фиг. 15):

$$S = 1{,}25 \,.\, q \,.\, l + 1{,}1 \,.\, p \,.\, l \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{90}$$

Такъ какъ сгибающій моментъ въ сѣченіи $F$ (фиг. 15) значительно меньше момента въ сѣченіи $F_2$ (см. формулы **87** и **87,a**), то сумма напряженій матеріала отъ сгибанія и сжатія для сѣченія $F$, гдѣ $x = 0{,}5 \,.\, a$, выходитъ всегда меньше, чѣмъ для сѣченія $F_2$, гдѣ $x = 2l - 0{,}5\,a$, а потому при разсчетѣ арки можно ограничиться разсмотрѣніемъ $S$ только въ сѣченіяхъ $N$ и $F_2$ на фиг. 15. Если какая-либо изъ этихъ двухъ величинъ $S$, по условіямъ заданной нагрузки, будетъ значительно превышать другую, то въ такомъ случаѣ полезно перемѣстить наклонныя тяги настолько, чтобы величина $S$ по формуламъ **89** и **90** получилась почти одинаковой.

Въ случаѣ арокъ съ одной горизонтальной тягой, наибольшій сгибающій моментъ по абсолютной величинѣ равенъ

$$max.\, M = \frac{1}{16} \cdot p \cdot l^2$$

и получается для сѣченій, у которыхъ

$$x=\frac{l}{2} \text{ и } x=\frac{3}{2}\cdot l.$$

Въ этомъ случаѣ

$$\text{при } f=\frac{2}{5}l, \qquad tg\,\beta=\frac{f}{l}=0{,}4.$$

$$Cos\,\beta=0{,}928; \qquad Sin\,\beta=0{,}372.$$

Для обѣихъ сторонъ арки

$$V_q=\frac{1}{2}\cdot q\cdot l\cdot$$

Для нагруженной стороны арки

$$V_p=\frac{3}{4}\cdot p\cdot l-\frac{1}{2}\cdot p\cdot l=\frac{1}{4}\cdot p\cdot l,$$

а для ненагруженной

$$V_p=\frac{1}{4}\cdot p\cdot l.$$

Затѣмъ по формулѣ **1**:

$$H_q=\frac{1}{2}\cdot\frac{q.l^2}{f}=1{,}25\,.\,q\,.\,l.$$

а по формулѣ **6**:

$$H_p=\frac{1}{4}\cdot p\cdot\frac{l^2}{f}=0{,}625\,.\,p\,.\,l,$$

Тогда

$$S_q=0{,}5\,.\,q\,.\,l\,.\,Sin\,\beta+1{,}25\,.\,q\,.\,l\,.\,Cos\,\beta=1{,}346\,.\,q\,.\,l$$

$$S_p=0{,}25\,.\,p\,.\,l\,.\,Sin\,\beta+0{,}625\,.\,p\,.\,l\,.\,Cos\,\beta=0{,}673\,.\,p\,.\,l.$$

Полное сжатіе для обоихъ опасныхъ сѣченій арки съ 1 тягой будетъ:

$$S=1{,}346\,.\,q\,.\,l+0{,}673\,.\,p\,.\,l.$$

**Сводъ данныхъ для разсчета параболическихъ фермъ съ 1 и 3 тягами.**

Пролетъ арокъ — $2\,l$. Подъемъ $f = \frac{2}{5}\,l$.

Нагрузка на всемъ пролетѣ — $q\,.\,2\,l$.

Нагрузка на половинѣ пролета — $p\,.\,l$.

**Арка съ одной тягой.** Моментъ въ опасномъ сѣченіи

$$\frac{1}{16} \cdot p \cdot l^2.$$

Натяженіе горизонтальной тяги

$$1{,}25\,.\,q\,.\,l + 0{,}625\,.\,p\,.\,l.$$

Наибольшее сжимающее усиліе въ опасномъ сѣченіи

$$1{,}346\,.\,q\,.\,l + 0{,}673\,.\,p\,.\,l.$$

**Арка съ 3 тягами** (1 горизонтальная и 2 наклонныхъ).

Шарниры находятся отъ опоры на разстояніи $\frac{2}{3}\,l$ ~~оп~~ по горизонтали.

Наибольшій сгибающій моментъ

$$\frac{1}{40} \cdot p \cdot l^2.$$

Натяженіе горизонтальной тяги

$$1{,}25 \,.\, q \,.\, l + 0{,}47 \,.\, p \,.\, l.$$

Натяженіе наклонныхъ тягъ

$$0{,}645 \,.\, p \,.\, l.$$

Наибольшее сжимающее усиліе въ опасномъ сѣченіи арки:

$$1{,}415 \,.\, q \,.\, l + 0{,}532 \,.\, p \,.\, l.$$

Сжимающее усиліе въ вершинѣ арки.

$$1{,}25 \,.\, q \,.\, l + 1{,}1 \,.\, p \,.\, l.$$

## Разсчетъ параболической фермы съ произвольнымъ числомъ тягъ.

### Опредѣленіе горизонтальныхъ слагающихъ натяженій тягъ и суммы этихъ слагающихъ.

На фиг. 17 представленъ эскизъ параболической фермы, дуга которой соединена съ каждымъ изъ опорныхъ узловъ $2n$ тягами. Всѣхъ наклонныхъ тягъ у фермы — $4n$.

Нагрузка распредѣляется отъ лѣвой опоры $A$ до средины фермы, и $n$ наклонныхъ тягъ, соединяющихъ опорный узелъ $A$ съ нагруженною стороною арки, обозначены на чертежѣ пунктиромъ, а другія $n$ тягъ, идущія отъ $A$ къ ненагруженной сторонѣ, нанесены сплошными линіями. Тяги, соединяющія узелъ $B$ съ $2n$ точками дуги, вовсе не нанесены на чертежѣ, чтобы не сдѣлать его слишкомъ пестрымъ *).

Точки прикрѣпленія или узлы наклонныхъ тягъ, обозначенныя на фиг. 17 цифрами и буквами

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ n,\ n+1\ \ldots\ldots\ 2n-1,\ 2n,$$

опредѣляются координатами слѣдующимъ образомъ:

ординаты ихъ названы

$$h_1\ h_2\ h_3\ \ldots\ldots\ h_n,$$

причемъ каждая ордината повторяется два раза — на лѣвой сторонѣ и на правой;

абсциссы же узловъ

$$a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ldots\ a_n$$

*) При нагруженіи одностороннемъ (фиг. 17) всѣ тяги, идущія къ правой опорѣ $B$, не будутъ напряжены, т. к. всѣ точки арки при такой нагрузкѣ перемѣщаются вправо: въ это время вытягиваться и нагружаться будутъ только тяги, идущія къ опорѣ $A$, а всѣ остальныя тяги будутъ разгружены.

для сплошныхъ тягъ отсчитываются отъ опоры $B$, а для пунктированныхъ тягъ—отъ опоры $A$.

По ур-iю параболы (см. форм. **5**) имѣемъ

$$h_m = f \cdot a_m \cdot \frac{2\,l - a_m}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{91}.$$

Давленiя на опоры обозначены, какъ и ранѣе, $V_1$ — на лѣвую, $V_2$—на правую.

Горизонтальныя слагающiя натяженiй наклонныхъ тягъ обозначены чрезъ

$$H_1\ H_2\ H_3\ \ldots\ldots H_n\ H_{n+1}\ \ldots\ldots H_{2n}\,.$$

Подобно случаю 3 тягъ, и здѣсь при нахожденiи моментовъ, опредѣляющихъ усилiя тягъ, необходимо вводить въ разсмотрѣнiе отрѣзки $z$ (фиг. 13) ординатъ. Чтобы различать эти отрѣзки, введемъ такое условiе:

*верхнiй индексъ справа отъ черты при $z$* — пусть обозначаетъ наименованiе узла, отъ котораго отсчитывается отрѣзокъ, а

*нижнiй индексъ справа отъ черты при $z$*—нумеръ наклонной тяги.

Такимъ образомъ, напримѣръ, отрѣзокъ $mi$ на фиг. 17 для $m$-го узла и 3-й тяги надо обозначить чрезъ

$$z\Big|_3^m .$$

Точно такъ же $ng$ для $n$-го узла и 1-й тяги будетъ обозначенъ чрезъ

$$z\Big|_1^n \qquad \text{и т. д.}$$

Отрѣзокъ $mr$ для узла $m$ и тяги $m-1$ (фиг. 18) геометрически будетъ опредѣляться такъ:

$$z\Big|_{m-1}^m = h_m - h_{m-1} \cdot \frac{2\,l - a_m}{2\,l - a_{m-1}} = \frac{f}{l^2}(2\,l - a_m)(a_m - a_{m-1})\,. \qquad \mathbf{92}.$$

На основанiи этого, для того же узла $m$ (фиг. 18) и тяги $k$ отрѣзокъ $mr_1$ можно написать по аналогiи такъ:

$$z\Big|_k^m = \frac{f}{l^2}(2\,l - a_m)(a_m - a_k).$$

Называя натяженіе горизонтальной тяги чрезъ $H_0$ и разсматривая моменты давленія $V_2$ на опору $B$ относительно узловъ

$$1\ 2\ 3\ \ldots\ldots\ n-1,\ n$$

ненагруженной стороны арки, будемъ имѣть слѣдующія равенства:

Для узла *1* (фиг. 17):

$$V_2 \cdot a_1 = H_0 \cdot h_1 .$$

Для узла *2* (фиг. 17):

$$V_2 \cdot a_2 = H_0 \cdot h_2 + H_1 \cdot z \Big|_1^2 .$$

Для узла *3* (фиг. 17):

$$V_2 \cdot a_3 = H_0 \cdot h_3 + H_1 \cdot z \Big|_1^3 + H_2 \cdot z \Big|_2^3 .$$

Для узла $m$ (фиг. 17):

$$V_2 \cdot a_m = H_0 \cdot h_m + H_1 \cdot z \Big|_1^m + H_2 \cdot z \Big|_2^m + \cdots\cdots + H_{m-1} \cdot z \Big|_{m-1}^m .$$

Для узла $n$ (фиг. 17):

$$V_2 \cdot a_n = H_0 \cdot h_n + H_1\ z \Big|_1^n + \cdots\cdots + H_m \cdot z \Big|_m^n + \cdots\cdots + H_{n-1} \cdot z \Big|_{n-1}^n .$$

Замѣняя величины $z$ и

$$h_1\ h_2\ h_3\ \ldots\ldots\ h_n$$

ихъ значеніями по формуламъ **91** и **92**, мы получимъ слѣдующія $n$ ур-ій:

Для горизонтальной тяги:

$$H_0 = V_2 \cdot \frac{l^2}{f} \cdot \frac{1}{2l - a_1} .$$

Для *1*-й наклонной тяги (*A1* на фиг. 17):

$$H_1 = V_2 \frac{l^2}{f} \cdot \frac{a_2}{(2l - a_1)(2l - a_2)} .$$

Для *2*-й наклонной тяги (*A2* на фиг. 17):

$$H_2 = V_2 \cdot \frac{l^2}{f} \cdot \frac{2l(a_3 - a_1)}{(2l - a_1)(2l - a_2)(2l - a_3)} .$$

Для *3*-й наклонной тяги:

$$H_3 = V_2 \cdot \frac{l^2}{f} \cdot \frac{2\,l\,(a_4 - a_2)}{(2\,l - a_2)(2\,l - a_3)(2\,l - a_4)}\,.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . и т. д.

Для $m$-ой наклонной тяги ($Am$ на фиг. 17):

$$H_m = V_2 \cdot \frac{l^2}{f} \cdot \frac{2\,l\,(a_{m+1} - a_{m-1})}{(2l - a_{m-1})(2\,l - a_m)(2\,l - a_{m+1})}\,.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . и т. д.

Для $(n-1)$-ой наклонной тяги

$$H_{n-1} = V_2 \cdot \frac{l^2}{f} \cdot \frac{2\,l\,(a_n - a_{n-2})}{(2l - a_{n-2})(2l - a_{n-1})(2l - a_n)}$$

Эти выраженія показываютъ, что:

*горизонтальная слагающая данной наклонной тяги параболической фермы равняется постоянному*

$$V_2 \cdot \frac{l^2}{f} \cdot 2\,l,$$

*помноженному на дробь, у которой*

**числитель** = *разности горизонтальныхъ разстояній между ближайшею къ данному узлу точкою опоры фермы и двумя узлами, смежными съ даннымъ, т. е. предыдущимъ и послѣдующимъ, а*

**знаменатель** = *произведенію трехъ горизонтальныхъ разстояній между опорою, наиболѣе удаленною отъ даннаго узла, и точками привѣса трехъ тягъ: данной, предыдущей и послѣдующей.*

Не трудно видѣть, что по этому же общему правилу можно написать и слагающую усилія 1-й тяги:

$$H_1 = V_2 \cdot \frac{l^2}{f} \cdot 2\,l \cdot \frac{a_2 - a_0}{(2\,l - a_2)(2\,l - a_1)(2\,l - a_0)}\,.$$

Это выраженіе приводится къ вышенаписанному для $H_1$, если въ него внести $a_0 = O$.

Дѣйствительное натяженіе каждой хорды или тяги получится путемъ дѣленія горизонтальной слагающей его на косинусъ угла, образуемаго тягою съ горизонталью.

Для $m$-ой тяги (фиг. 18) получимъ:

$$Cos\ \alpha_m = \frac{2l - a_m}{\sqrt{(2l - a_m)^2 + h_m^2}} =$$

$$= 1 : \sqrt{1 + \frac{f^2 \cdot a_m^2}{l^4}} \ldots \ldots \ldots \ldots \mathbf{93}.$$

Сумма всѣхъ величинъ $H$ отъ $H_0$ до $H_{n-1}$ включительно опредѣляется такъ:

$$\sum_0^{n-1} H = V_2 \cdot \frac{l^2}{f} \cdot \frac{2l}{(2l - a_n)(2l - a_{n-1})} \ldots \ldots \mathbf{94}.$$

Для опредѣленія величинъ $H$ для тягъ, идущихъ въ нагруженной сторонѣ арки, а равно и для тяги $n$-ой ($An$ на фиг. 17), въ ур-іе моментовъ необходимо вводить, кромѣ момента отъ давленія $V_2$ на правую опору, еще моментъ отъ равномѣрной нагрузки, расположенной между срединою фермы и точкою, которая взята за центръ моментовъ. Такъ, напр., въ случаѣ $n$-ой тяги моментъ надо брать относительно узла $(n+1)$ (фиг. 17), координаты котораго тѣ же, что и для узла $n$, т.-е.

$$h_n \text{ и } a_n,$$

и надо ввести моментъ

$$\frac{p}{2} \cdot (l - a_n)^2$$

отъ равномѣрной нагрузки на длинѣ $(l - a_n)$.

Величины отрѣзковъ $z$ для всѣхъ точекъ лѣвой половины арки имѣютъ иное алгебраическое выраженіе, чѣмъ для правой.

Обращаясь къ чертежу (фиг. 18), возьмемъ узелъ $(2n - m)$-ый съ координатами

$$a_m \text{ и } h_m.$$

Для произвольной тяги $q$ (фиг. $18 - Aq$) правой, ненагруженной стороны мы имѣемъ координаты

$$h_q \text{ и } a_q,$$

а величина отрѣзка

$$z\Big|_q^{2n-m} = h_m - a_m \cdot h_q \cdot \frac{1}{2l - a_q} =$$

$$= \frac{f}{l^2}(2l - a_m - a_q) \ldots \ldots \ldots \ldots \mathbf{95}.$$

А для тяги $(2n - q)$, идущей къ опорному узлу $A$ отъ лѣвой нагруженной стороны, имѣемъ координаты тоже

$$h_q \text{ и } a_q,$$

но величина отрѣзка

$$z \Big|_{2n-q}^{2n-m} = h_m - h_q \cdot \frac{a_m}{a_q} = \frac{f}{l^2} \cdot a_m (a_q - a_m) \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{96}.$$

При составленіи ур-ія моментовъ относительно узла $(2n - m)$-го имѣемъ въ виду, что абсцисса узла $(n + 2)$, напр., есть уже $a_{n-1}$ и что послѣдняя тяга въ этомъ случаѣ будетъ $(2n - m + 1)$-я. Тогда

$$V_2 \cdot (2l - a_m) = \frac{f}{l^2} \cdot a_m \Big[ H_0 \cdot (2l - a_m) + H_1 \cdot (2l - a_m - a_1) + \ldots\ldots \ldots$$

$$\ldots + H_{n-1} \cdot (2l - a_m - a_{n-1}) + H_n \cdot (2l - a_m - a_n) + H_{n+1} \cdot (a_n - a_m) +$$

$$+ H_{n+2} \cdot (a_{n-1} - a_m) + \ldots\ldots + H_{2n-m+1} \cdot (a_{m+1} - a_m) \Big] + \frac{p}{2} \cdot (l - a_m)^2 . \mathbf{97}.$$

Та часть этого ур-ія, которая представляетъ собою сумму моментовъ усилій тягъ ненагруженной стороны, на основаніи формулы **94** преобразуется такъ:

$$\frac{f}{l^2} \cdot a_m \Big\{ H_0 \cdot (2l - a_m) + H_1 \cdot (2l - a_m - a_1) + \ldots\ldots H_{n-1} \cdot (2l - a_m - a_{n-1}) \Big\} =$$

$$= \frac{f}{l^2} \cdot a_m \Big[ (2l - a_m) \sum\nolimits_0^{n-1} H - \sum\nolimits_1^{n-1} H \cdot a \Big] =$$

$$= V_2 \cdot \frac{a_m}{(2l - a_{n-1})(2l - a_n)} \Big( 2l\,(2l - a_m) - a_{n-1} \cdot a_n \Big) \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{98}.$$

Тогда ур-іе **97** приметъ слѣдующій видъ:

$$V_2 \cdot \Big[ 2l - a_m - a_m \cdot \frac{2l\,(2l - a_m) - a_{n-1} \cdot a_n}{(2l - a_{n-1})(2l - a_n)} \Big] = \frac{f}{l^2} . a_m . \Big\{ H_n \cdot (2l - a_m - a_n) +$$

$$+ H_{n+1} \cdot (a_n - a_m) + \ldots\ldots + H_{2n-m+1} \cdot (a_{m+1} - a_m) \Big\} + \frac{p}{2} . (l - a_m)^2 \ldots . \mathbf{99}.$$

Примѣняя ур-іе **99** къ опредѣленію $H_n$, беремъ моментъ относительно узла $(n + 1)$-го съ ординатами

$$h_n \text{ и } a_n;$$

тогда въ этомъ ур-іи надо отбросить всѣ члены, стоящіе послѣ $H_n$ въ скобкѣ, какъ не входящіе въ составъ момента относительно узла $(n+1)$-го; кромѣ того, надо принять въ этомъ случаѣ

$$a_m = a_n.$$

Тогда,

$$H_n \cdot a_n \cdot \frac{2f}{l^2} . (l - a_n) = V_2 \cdot \left[ 2l - a_n - a_n . \frac{2l(2l - a_n) - a_{n-1} \cdot a_n}{(2l - a_{n-1})(2l - a_n)} \right] - \frac{p}{2}(l - a_n)^2$$

Но при распредѣленіи нагрузки на полупролетѣ

$$p = 4 V_2 : l,$$

поэтому окончательно будемъ имѣть:

$$H_n = V_2 \cdot \frac{l^2}{f} \cdot \frac{1}{a_n} \cdot \left\{ 2l . \frac{2l - a_n - a_{n-1}}{(2l - a_n)(2l - a_{n-1})} - \frac{l - a_n}{l} \right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{100.}$$

Примѣняя эту общую формулу къ частному случаю трехъ тягъ, мы должны положить

$$a_n = a_1 \qquad a_{n-1} = 0,$$

тогда получимъ:

$$H_1 = V_2 \cdot \frac{l^2}{f . a_1} \left( 1 - \frac{l - a_1}{l} \right) = V_2 \cdot \frac{l}{f} = \frac{1}{4} \cdot p \cdot \frac{l^2}{f},$$

что вполнѣ согласно съ формулой **78**.

Совершенно такимъ же образомъ находятся величины $H$ и для всѣхъ остальныхъ тягъ.

Найденное значеніе $H_n$ даетъ теперь возможность опредѣлить сумму всѣхъ $H$ отъ $H_0$ до $H_n$ включительно, пользуясь формулами **94** и **100**:

$$\sum_0^n H = V_2 \cdot \frac{l}{f} \cdot \frac{3l - a_n}{2l - a_n} \quad \ldots\ldots\ldots \mathbf{101.}$$

$$\sum_0^m H \cdot a = V_2 \cdot \frac{l}{f} \cdot a_n \quad \ldots\ldots\ldots \mathbf{102.}$$

Примѣняя формулу **99** къ узлу $(n+2)$-му, координаты котораго

$$a_{n-1} \text{ и } h_{n-1},$$

получимъ $H_{n+1}$ изъ выраженія:

$$V_2\left[2l-a_{n-1}-a_{n-1}\cdot\frac{(2l-a_{n-1})(3l-a_n)}{l(2l-a_n)}+\frac{a_n\cdot a_{n-1}}{l}\right]-\frac{p}{2}(l-a_n)^2=$$

$$=H_{n+1}\cdot\frac{f}{l^2}\cdot a_{n-1}\cdot(a_n-a_{n-1}),$$

откуда:

$$H_{n+1}=V_2\cdot\frac{l}{f}\cdot\frac{l-a_n}{2l-a_n}\quad\ldots\ldots\ldots\quad \mathbf{103.}$$

$$\sum\nolimits_0^{n+1}H=2V_2\cdot\frac{l}{f}=\frac{p\cdot l^2}{2f}\quad\ldots\ldots\quad \mathbf{104.}$$

$$\sum\nolimits_1^{n}H\cdot a+H_{n+1}\cdot(2l-a_n)=V_2\cdot\frac{l^2}{f}\quad\ldots\ldots\quad \mathbf{105.}$$

Примѣняя ур-іе **99** къ узлу $(n+3)$-му, координаты котораго

$a_{n-2}$ и $h_{n-2}$,

получимъ:

$$V_2\left[2l-a_{n-2}-2a_{n-2}\cdot\frac{2l-a_{n-2}}{l}+a_{n-2}\right]-\frac{p}{2}\cdot(l-a_{n-2})^2=$$

$$=H_{n+2}\cdot a_{n-2}\cdot(a_{n-1}-a_{n-2}).$$

Откуда

$$H_{n+2}=0\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad \mathbf{106.}$$

Совершенно такимъ же путемъ найдемъ, что и всѣ остальныя значенія

$H_{n+3}$, $H_{n+4}$, $H_{n+5}$ и т. д.

равны нулю. Слѣдовательно,

*проведеніе какихъ бы то ни было тягъ въ промежуткѣ между узлами $n+1$ и $A$ безполезно, если нагрузка равномѣрно распредѣлена по лѣвому полупролету.*

При иномъ распредѣленіи нагрузки, въ вышеприведенныхъ формулахъ измѣняется только соотношеніе между $p$ и $V_2$, общій же видъ ур-ій, опредѣляющихъ натяженіе произвольной тяги, остается тотъ же.

Сравнивая формулы **104** и **1** видимъ, что

*сумма горизонтальныхъ проекцій натяженій всѣхъ тягъ при односторонней нагрузкѣ $=$ тому натяженію, какое имѣла бы одна горизон-*

*тальная тяга въ случаѣ параболической фермы, равномѣрно нагруженной по всему пролету тою же нагрузкою* $p$ *на единицу длины пролета, какъ и при одностороннемъ нагруженіи.*

При значеніи

$$a_n = l$$

по формулѣ **103** видимъ, что

$$H_{n+1} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{107}$$

т. е. *если вершина параболической арки является однимъ изъ узловъ для прикрѣпленія тягъ къ фермѣ, то послѣднею изъ тягъ, приходящихъ въ лѣвый опорный узелъ справа, будетъ тяга, идущая къ вершинѣ арки.*

Въ этомъ случаѣ формула **101** даетъ:

$$\sum_0^n H = V_2 \cdot \frac{2l}{f} = p \cdot \frac{l^2}{2f} \ldots\ldots\ldots \mathbf{108.}$$

Въ случаѣ арки съ тремя тягами при $a = l$ найдемъ по формуламъ **77** и **78**:

$$\sum_0^1 H = H_0 + H_1 = p \cdot \frac{l^2}{2f} \ldots\ldots\ldots \mathbf{109.}$$

Сравненіе формулъ **104**, **108** и **109** показываетъ намъ, что *сумма горизонтальныхъ проекцій натяженій въ тягахъ не зависитъ отъ числа наклонныхъ тягъ, выходящихъ изъ опорнаго узла параболической фермы.*

Опредѣленіе числа наклонныхъ тягъ, подобно опредѣленію числа панелей въ прямолинейныхъ фермахъ, должно быть сдѣлано въ зависимости отъ разсмотрѣнія величины сгибающихъ моментовъ въ аркѣ.

## Опредѣленіе сгибающихъ моментовъ въ сѣченіяхъ арки.

Опредѣленіе величины сгибающихъ моментовъ и ея *max* для разныхъ частей арки, въ случаѣ произвольнаго числа тягъ, дѣлается тѣмъ же способомъ, какъ и въ случаѣ 3 тягъ.

Взявъ начало координатъ въ точкѣ *B* (фиг. 17), между узлами *B* и *1* будемъ имѣть:

$$M_1 = V_2 \cdot x - H_0 \cdot y = V_2 \cdot x - V_2 \cdot \frac{2l \cdot x - x^2}{2l - a_1}$$

$$M_1 = - V_2 \cdot x \cdot \frac{a_1 - x}{2l - a_1} \ldots\ldots\ldots \mathbf{110.}$$

При $x = a_1$ и $x = 0$ . . . . . . $M_1 = 0$.

Наибольшее значеніе $M_1$ будетъ имѣть мѣсто при

$$x = \frac{a_1}{2},$$

опредѣляемомъ изъ условія

$$\frac{d\,M_1}{d\,x} = 0$$

$$max.\ M_1 = -\frac{V_2}{4} \cdot \frac{a_1^2}{2\,l - a_1} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{111.}$$

Между узлами 1 и 2 (фиг. 17) при измѣненіи $x$ отъ $a_1$ до $a_2$, найдемъ:

$$M_2 = V_2 \cdot x - H_0 \cdot y - H_1 \left(y - h_1 \cdot \frac{2\,l - x}{2\,l - a_1}\right)$$

$$M_2 = -V_2 \cdot 2\,l \cdot \frac{(a_1 - x)(a_2 - x)}{(2\,l - a_1)(2\,l - a_2)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{112.}$$

При $x = a_1$ и $x = a_2$ . . . . . . . . . $M_2 = 0$.

Наибольшее значеніе $M_2$ получится изъ условія

$$\frac{d\,M_2}{d\,x} = 0,$$

которое даетъ:

$$x = \frac{a_2 - a_1}{2}$$

$$max.\,M_2 = -V_2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{(a_2 - a_1)^2}{(2l - a_1)(2l - a_2)} \quad . \; . \; . \; . \; \mathbf{113.}$$

Подобнымъ же образомъ между узлами *2* и *3* для сѣченія, лежащаго на половинѣ горизонтальнаго разстоянія между ними, найдемъ

$$max.\ M_3 = -V_2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{(a_3 - a_2)^2}{(2\,l - a_3)(2\,l - a_2)}.$$

По аналогіи, для $m$-ой части арки, между узлами ея $(m-1)$ и $m$

$$max.\ M_m = -V_2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{(a_m - a_{m-1})^2}{(2l - a_m)(2l - a_{m-1})} \quad . \; . \; . \; \mathbf{114.}$$

Наконецъ, въ послѣдней ненагруженной части арки, между узлами ея $(n-1)$ и $n$ получимъ:

$$M_n = V_2 \cdot 2l \cdot \frac{(x-a_n)(x-a_{n-1})}{(2l-a_n)(2l-a_{n-1})} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{115.}$$

При $x = a_n$ и $x = a_{n-1}$ . . . . . . . $M_n = 0$, а затѣмъ:

$$max.\ M_n = -V_2 \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{(a_n - a_{n-1})^2}{(2l-a_n)(2l-a_{n-1})} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{116.}$$

Формула **116** показываетъ намъ, что

*наибольшій моментъ въ произвольной части ненагруженной стороны параболической арки равенъ постоянному*

$$V_2 \cdot \frac{l}{2},$$

*умноженному на дробь, у которой*

**числитель** *есть квадратъ разности горизонтальныхъ разстояній узловъ разсматриваемой части арки отъ ближайшей ея опоры, а*

**знаменатель** *выражается произведеніемъ горизонтальныхъ разстояній узловъ данной части арки отъ дальней ея опоры.*

Дадимъ здѣсь графическое представленіе о максимальномъ моментѣ между двумя данными узлами $(m-1)$ и $m$ (фиг. 19). По свойству параболы, точка $e$ (фиг. 19), лежащая на срединѣ горизонтальнаго разстоянія между узлами, соотвѣтствуетъ и наибольшей стрѣлкѣ $O\,O_1$ дуги параболы. *Max* момента между данными узлами графически представляется произведеніемъ стрѣлки $O\,O_1$ на проекцію давленія $V_2$, взятую на направленіе хорды $(m,\ m-1)$.

Всѣ моменты ненагруженной стороны арки отрицательны. Это указываетъ на то, что всѣ части разсматриваемой половины арки уменьшаютъ радіусъ своей кривизны послѣ нагрузки.

Въ части арки между узлами $n$ и $(n+1)$ моментъ будетъ имѣть два разныхъ выраженія, — одно справа отъ вершины $l$ арки (фиг. 17), а другое слѣва отъ нея, гдѣ въ число дѣйствующихъ силъ вводится также и равномѣрная нагрузка на аркѣ.

Между точками $n$ и $l$ (фиг. 17), при измѣненіи $x$

от $x = a_n$ до $x = l$,

будемъ имѣть:

$$M'_{n+1} = M_n - H_n \cdot z \Big|_n^l = M_n - H_n \cdot \frac{f}{l^2}(2l - x)(x - a_n).$$

Величина входящаго въ это равенство отрѣзка $z$ вычислена примѣнительно къ формулѣ **92**.

Послѣ алгебраическихъ преобразованій получаемъ:

$$M'_{n+1} = \frac{V_2}{l} \cdot \frac{x - a_n}{2l - a_n} \cdot \Big[ l \cdot x - (2l - x)(2l - a_n) \Big] \; \ldots\ldots \; \mathbf{117}.$$

Наибольшее значеніе этого момента получится, когда

$$x = \frac{4l^2 + l \cdot a_n - a_n^2}{6l - 2a_n} \; \ldots\ldots\ldots \; \mathbf{118}.$$

Какъ самое выраженіе $M_{n+1}$, такъ и значеніе $x$, соотвѣтствующее $max$ момента не зависятъ отъ числа тягъ и тождественны съ тѣми, которыя были получены для случая трехъ тягъ. Тамъ начало координатъ было взято въ точкѣ $A$, слѣдовательно, для сравненія полученныхъ результатовъ надо въ формулахъ **117** и **118** подставить

$2l - x$ вмѣсто $x$.

Замѣтимъ здѣсь, что при числѣ наклонныхъ тягъ болѣе двухъ отрѣзокъ $a_n$ выходитъ настолько близкимъ къ $l$, что безъ особой погрѣшности въ разсчетахъ можно принимать

$$x = l$$

вмѣсто той величины, которую даетъ формула **118**. А тогда

$$max.\, M'_{n+1} = -V_2 \cdot \frac{(l - a_n)^2}{2l - a_n} \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; \mathbf{119}.$$

Между точками $l$ и $(n+1)$ на фиг. 17 моментъ выразится такъ:

$$M''_{n+1} = M'_{n+1} - \frac{p}{2} \cdot (x - l)^2,$$

причемъ въ этой формулѣ $x$ можетъ измѣняться

отъ $x = l$ до $x = 2l - a_n$.

Внося въ это выраженіе

$$V_2 = \frac{1}{4} \cdot p \cdot l,$$

получимъ:

$$M''_{n+1}=\frac{V_2}{l}\left[l\cdot x\cdot\frac{x-a_n}{2l-a_n}-2(x-l)^2-(2l-x)(x-a_n)\right]\ldots\ldots\mathbf{120}.$$

Не трудно видѣть, что это выраженіе момента, сохраняя отрицательное значеніе, постепенно уменьшается въ абсолютной величинѣ и

$$\text{при } x=2l-a_n\ldots\ldots\ldots M''_{n+1}=0.$$

Еслибы тяги $(n+1)$-ой не было проведено, то на всей лѣвой половинѣ арки, отъ точки $l$ до $A$ на фиг. 17, моментъ выражался бы формулою **120**, величина его все время была бы положительна и

$$\text{при } x=2l\ldots\ldots M''_{n+1}=0.$$

Наибольшее положительное значеніе этого момента получилось бы тогда

$$\text{при } x=2l-\frac{a_n}{2}$$

$$max.\ M''_{n+1}=+\frac{V_2}{4l}\cdot a_n^2\cdot\frac{l-a_n}{2l-a_n}\ldots\ldots\ldots\ldots\mathbf{121},$$

*т. е. этотъ max момента, въ случаѣ отсутствія $(n+1)$-ой тяги не зависѣлъ бы вовсе отъ числа тягъ и былъ бы совершенно тождественъ съ тѣмъ, который мы получили въ случаѣ 3* тягъ (см. форм. **80**).

Если же имѣется тяга $(n+1)$-я, тогда для всякаго сѣченія $c$ (фиг. 18) между узлами $(n+1)$ и $A$, пользуясь формулой **96**, мы напишемъ:

$$M_{n+2}=M''_{n+1}-H_{n+1}\cdot\frac{f}{l^2}\cdot(2l-x)(a_n-2l+x)=0\ldots\ldots\mathbf{122}.$$

т. е. *когда $(n+1)$-ая тяга существуетъ, вся дуга, стягиваемая $(n+1)$-ою хордою, не испытываетъ на себѣ дѣйствія сгибающихъ моментовъ.*

## Опредѣленіе наивыгоднѣйшаго расположенія тягъ арочной фермы и разсчетныхъ моментовъ для нея.

Для правильнаго распредѣленія матеріала и полученія возможно малаго вѣса фермы, необходимо, чтобы сумма напряженій матеріала отъ силы сжатія и наибольшаго сгибающаго момента для всѣхъ частей арки между ея узлами была одинакова. Но такъ какъ усилія сжатія, при небольшихъ подъемахъ арокъ, разнятся другъ отъ друга незначительно, то для 1-го приближенія къ рѣшенію задачи достаточно опредѣлить расположеніе тягъ подъ условіемъ равенства наибольшихъ моментовъ, т. е.

$$max.\ M_1 = max.\ M_2 = \ldots\ldots\ldots = max.\ M'_{n+1},$$

что даетъ намъ рядъ слѣдующихъ ур-ій:

$$\frac{a_1^2}{2l\,(2l-a_1)} = \frac{(a_2-a_1)^2}{(2l-a_1)(2l-a_2)} = \frac{(a_3-a_2)^2}{(2l-a_2)(2l-a_3)} = \ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots = \frac{(a_n-a_{n-1})^2}{(2l-a_{n-1})\,(2l-a_n)} = 2.\,\frac{(l-a_n)^2}{2l-a_n} \ldots\ldots \mathbf{123.}$$

Если арка по всей своей длинѣ имѣетъ однообразное сѣченіе, то при подборѣ величинъ $a_1$ $a_2$ $a_3$ и т. д., удовлетворяющихъ условію **123**, слѣдуетъ при округленіи цифръ брать такія значенія этихъ величинъ, при которыхъ моменты для частей арки возлѣ опоры $B$ и среднихъ частей фермы оставались бы одинаковыми, а моментъ $M_{n+1}$ у вершины былъ бы немного меньше остальныхъ максимальныхъ моментовъ, такъ какъ истинное значеніе $max\ M_{n+1}$ больше того, которое дается приближенной формулой **119**.

Точное рѣшеніе ур-ій, получаемыхъ изъ условія **123**, представляетъ значительныя алгебраическія трудности. Но для цѣлей практическаго разсчета данныя, достаточно близкія къ истиннымъ, могутъ быть получены слѣдующимъ пріемомъ:

Задавшись числомъ тягъ $n$ для полуфермы, идущихъ изъ узла $A$, допустимъ, что

$$a_n = l \cdot \frac{2n}{2n+1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{124.}$$

Тогда по формулѣ **119** находимъ абсолютную величину

$$max.\ M_{n+1} = \frac{V_2 . l}{2\,(n+1)(2n+1)} = \frac{pl^2}{8} \cdot \frac{1}{(n+1)\,(2n+1)} \ldots\ldots \mathbf{125.}$$

Затѣмъ $a_{n-1}$ опредѣлимъ изъ ур-ія:

$$\frac{2\ (l-a_n)^2}{l} = \frac{(a_n-a_{n-1})^2}{2l-a_{n-1}} \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{126.}$$

По найденной величинѣ $a_{n-1}$ найдется подобнымъ же образомъ $a_{n-2}$ и т. д. до $a_1$. Въ результатѣ при такомъ разсчетѣ получатся равные моменты отъ $M_{n+1}$ до $M_2$, и только моментъ $M_1$, вычисляемый по формулѣ **111**, окажется меньше остальныхъ. Послѣ этого можно придать за счетъ увеличенія $M_1$ нѣкоторое послѣдовательное уменьшеніе всѣхъ моментовъ до $M_n$ включительно.

Этотъ пріемъ рѣшенія ур-ій **123** приводитъ къ слѣдующимъ результатамъ:

**При n = 2** (у арки 4 наклонныхъ тяги и 1 горизонтальная):

$$a_2 = 0{,}81 . l;\quad a_1 = 0{,}45 . l$$

Разсчетные моменты

$$M_1 = M_2 = M_3 = \frac{1}{120} \cdot p . l^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{127.}$$

**При n = 3** находимъ:

$$a_3 = 0{,}86 . l;\quad a_2 = 0{,}625 . l;\quad a_1 = 0{,}335 . l.$$

Разсчетные моменты:

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = \frac{1}{224} \cdot p . l^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{128.}$$

**При n = 4** получимъ:

$$a_4 = 0{,}89 . l;\quad a_3 = 0{,}72 . l;\quad a_2 = 0{,}51 . l;\quad a_1 = 0{,}27 . l;$$

Разсчетный моментъ

$$M = \frac{1}{360} \cdot p . l^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{129.}$$

**При n = 5** найдемъ:

$$a_5 = 0{,}91 . l;\quad a_4 = 0{,}766 . l;\quad a_3 = 0{,}605 . l;$$
$$a_2 = 0{,}425 . l;\quad a_1 = 0{,}22 . l.$$

Разсчетный моментъ

$$M = \frac{1}{528} \cdot p . l^2 \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{130.}$$

При $n = 1$, т. е. въ случаѣ арки о трехъ тягахъ, формула **124** даетъ:

$$a_n = l . \frac{2n}{2n+1} = \frac{2}{3} l,$$

что согласно съ формулой **86**.

По формулѣ **55** въ прямолинейныхъ фермахъ зависимость разсчетнаго момента отъ числа панелей дана такою:

$$M = \frac{1}{8n^2} \cdot q \cdot l^2.$$

Пусть

$$M : q \cdot l^2 = N.$$

Полагая $p = \frac{1}{3} \cdot q$, сравнительныя величины сгибающихъ моментовъ для прямолинейной и арочной фермы, при одинаковомъ числѣ панелей у нихъ, получимъ въ такомъ видѣ:

| Число панелей ........ $n=$ | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| Въ арочной фермѣ $N=$ | $\frac{1}{360}$ | $\frac{1}{672}$ | $\frac{1}{1080}$ | $\frac{1}{1584}$ |
| Въ прямой фермѣ. $N=$ | $\frac{1}{32}$ | $\frac{1}{72}$ | $\frac{1}{128}$ | $\frac{1}{200}$ |

Эта таблица показываетъ, что *при одномъ и томъ же числѣ панелей и тягъ сгибающій моментъ для арочной фермы выходитъ въ среднемъ въ* **восемь** *разъ меньше, чѣмъ для прямолинейной.*

Найденныя величины сгибающаго момента опредѣляютъ размѣры поперечнаго сѣченія арки, которыя выходятъ одинаковыми по всей длинѣ арки.

Положительный моментъ $max. M''_{n+1}$, опредѣляемый по формулѣ **121** для нагруженной стороны арки при отсутствіи $(n+1)$-ой тяги, по абсолютной величинѣ меньше $max. M'_{n+1}$, который вычисляется по формулѣ **119**.

При маломъ числѣ тягъ необходимо дѣлать поправку въ выраженіи $max. M'_{n+1}$ (въ форм. **119**), опредѣляя абсциссу его сѣченія болѣе точно по форм. **118**, а моментъ по форм. **117**.

Если $n$-я тяга проходитъ чрезъ вершину арки, то

$$a_n = l,$$

и по формуламъ **119** и **121** находимъ

$$max\, M'_{n+1} = max''_{n+1} = 0, \quad = max\, M''_{n+1} = 0$$

а по формулѣ **116** получаемъ:

$$max\, M_n = -\frac{V_2}{2} \cdot \frac{(l - a_{n-1})^2}{2l - a_{n-1}}.$$

Тогда указанный выше способъ рѣшенія ур-ій **123** не примѣнимъ. Въ этомъ случаѣ, также для приблизительнаго рѣшенія, съ достаточной точностію можно положить:

$$\frac{V_2}{2} \cdot \frac{(l - a_{n-1})^2}{2l - a_{n-1}} = V_2 \cdot \frac{l}{4n^2},$$

опредѣлить отсюда $a_{n-1}$ и внести его величину въ ур-іе

$$\frac{(a_{n-1} - a_{n-2})^2}{(2l - a_{n-1})(2l - a_{n-2})} = \frac{l}{2n^2},$$

изъ котораго можно найти $a_{n-2}$ и т. д. Этотъ способъ рѣшенія ур-ій **123** даетъ:

**При n = 2**

$$a_1 = 0{,}586 \cdot l; \qquad a_2 = l$$

$$max\, M = max\, M_1 = max\, M_2 = V_2 \cdot \frac{l}{16} = V_2 \cdot \frac{l}{4 \cdot 2^2}.$$

**При n = 3.**

$$a_1 = 0{,}415 \cdot l; \qquad a_2 = 0{,}74\, l$$

$$max\, M = V_2 \frac{l}{36} = V_2 \cdot \frac{l}{4 \cdot 3^2}.$$

**При n = 4**

$$a_1 = 0{,}32 \cdot l; \qquad a_2 = 0{,}58 \cdot l; \qquad a_3 = 0{,}81 \cdot l; \qquad a_4 = l.$$

$$max\, M = V_2 \cdot \frac{l}{64} = V_2 \cdot \frac{l}{4 \cdot 4^2}.$$

При односторонней нагрузкѣ

$$V_2 = \frac{1}{4} \cdot p \cdot l \cdot$$

Слѣдовательно, въ случаѣ $n$ тягъ, изъ коихъ послѣдняя проходитъ чрезъ вершину, въ ненагруженной сторонѣ:

$$max\, M = \frac{1}{16} \cdot \frac{p \cdot l}{n^2}.$$

Въ прямолинейныхъ стропилахъ, каждая половина фермы которыхъ разбита на $n$ панелей, для всякой панели (см. форм. **55**):

$$max\, M = \frac{1}{8} \cdot \frac{q_0 \cdot l^2}{n^2},$$

гдѣ

$$q_0 = q + p.$$

## Усилія сжатія.

Усилія сжатія для фермы съ произвольнымъ числомъ тягъ опредѣляются тѣмъ же путемъ, какъ и въ случаѣ арки съ 3 тягами, въ тѣхъ сѣченіяхъ, гдѣ имѣютъ мѣсто наибольшіе сгибающіе моменты.

Въ ненагруженной половинѣ арки сжатіе, вычисляемое для случая нагрузки, распредѣленной по всему пролету равномѣрно, увеличивается по мѣрѣ приближенія отъ вершины къ опорѣ, а сжатіе, вызываемое односторонней нагрузкой, наоборотъ, уменьшается, идя отъ вершины арки къ ея опорѣ.

Наибольшее сжатіе отъ односторонней нагрузки, вызываемое у вершины арки, равняется суммѣ горизонтальныхъ слагающихъ натяженій $n$ тягъ и вычисляется по формулѣ **101**:

$$S = V_2 \cdot \frac{l}{f} \cdot \frac{3\,l - a_n}{2\,l - a_n}.$$

Принимая въ пользу прочности

$$a_n = l,$$

получимъ:

$$S_p = 2 \cdot V_2 \cdot \frac{l}{f} = p \cdot \frac{l^2}{2f} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{131},$$

т. е. *наибольшее сжатіе отъ дѣйствія односторонней нагрузки на арку выходитъ такимъ, какимъ оно было бы, еслибы существовала нагрузка на всемъ пролетѣ съ тою же величиною нагрузки на 1 длины* (см. форм. 1).

Прибавляя къ этой величинѣ и сжатіе отъ нагрузки $2\,l \,.\, q$, равномѣрно распредѣленной по всему пролету, полное сжатіе въ вершинѣ арки отъ обѣихъ нагрузокъ будетъ:

$$S = (p + q) \cdot \frac{l^2}{2f} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{132}.$$

При встрѣчаемыхъ въ практикѣ отношеніяхъ между $p$ и $q$, сжатіе въ сѣченіи $max.\ M_{II}$ не превзойдетъ величины, опредѣляемой формулою **132**.

Сжатіе въ нагруженной части арки больше, чѣмъ въ ненагруженной, но зато тамъ моментъ меньше, и общее суммарное напряженіе матеріала, при одинаковой величинѣ сѣченія арки на всемъ ея протяженіи, въ нагруженной сторонѣ не превзойдетъ его въ ненагруженной части.

Наибольшее сжатіе у опоры $A$, гдѣ моментъ равенъ $O$, будетъ:

$$\frac{q\,l^2}{2\,f}\cdot Cos\,\alpha + q\cdot l\cdot Sin\,\alpha = \frac{q\,l^2}{2\,f}\cdot\sqrt{1+4\frac{f^2}{l^2}}\quad .\ .\ .\ .\ \mathbf{133},$$

такъ какъ изъ ур-ія **5**:

$$tg\,\alpha = 2\,f\cdot\frac{l-x}{l^2},$$

а возлѣ опоры, гдѣ $x=0$,

$$tg\,\alpha = \frac{2\,f}{l}.$$

## Сводъ данныхъ для разсчета арки съ произвольнымъ числомъ тягъ.

Всѣхъ тягъ—$(2\,n+1)$, причемъ одна изъ нихъ горизонтальна.

Постоянная нагрузка на всемъ пролетѣ—$q_0\cdot 2\,l$.

Односторонняя нагрузка на полупролетѣ—$p\cdot l$.

При выборѣ числа тягъ, соединяющихъ каждую половину арки съ противоположной опорой, можно руководствоваться слѣдующимъ данными.

| Длина пролета. | Число тягъ $n$. |
|---|---|
| Не болѣе 3 саж. (6 *mt*). | Наклонныхъ тягъ нѣтъ. |
| Отъ 3 до 5 саж. (до 10 *mt*). | 1 тяга. |
| Отъ 5 до 8 саж. (до 16 *mt*). | 2 тяги. |
| Отъ 8 до 12 саж. (до 24 *mt*). | 3 „ |

При дальнѣйшемъ увеличеніи пролета за 12 саж., на каждыя добавочныя 3 саж. слѣдуетъ прибавлять 1 тягу.

При числѣ тягъ $n=$ или болѣе $2$, съ точностію, вполнѣ достаточною для практическихъ разсчетовъ, величина разсчетнаго сгибающаго момента можетъ быть опредѣляема по формулѣ:

$$M=\frac{p\cdot l^2}{8}\cdot\frac{1}{(n+1)(2\,n+1)}.$$

Натяженіе горизонтальной тяги

$$H_0 = \frac{l^2}{f}\left(\frac{q_0}{2} + \frac{p}{4} \cdot \frac{l}{2l - a_1}\right).$$

Натяженіе произвольной наклонной тяги, соединяющей $m$-ый узелъ съ опорой:

$$\frac{H_m}{Cos\ \alpha_m} = \frac{p \,.\, l^3}{4f} \cdot \frac{2l(a_{m+1} - a_{m-1})}{(2l - a_{m-1})(2l - a_m)(2l - a_{m+1})} \cdot \sqrt{1 + \frac{f^2}{l^4} a_m^2}.$$

Натяженіе $n$-ой тяги, смежной съ вершиной арки:

$$\frac{H_n}{Cos\ \alpha_n} = \frac{p\,l^3}{4f} \cdot \frac{1}{a_n}\left[2l \cdot \frac{2l - a_n - a_{n-1}}{(2l - a_n)(2l - a_{n-1})} - \frac{l - a_n}{l}\right] \cdot \sqrt{1 + \frac{f^2}{l^4}\ a_n^2}.$$

Сжатіе въ вершинѣ арки:

$$(p + q_0) \cdot \frac{l^2}{f}.$$

Сжатіе у опоръ арки:

$$\frac{q_0 \,.\, l^2}{2f}\sqrt{1 + 4 \cdot \frac{f^2}{l^2}}.$$

## Вѣсъ арочной фермы съ $(2n + 1)$ тягами.

Предположимъ, что дуга арки и ея горизонтальная тяга разсчитаны на равномѣрную нагрузку

$$q_0 + p = q,$$

т. е. что нагрузка съ величиною $p$ на погонную единицу длины тоже равномѣрно распредѣлена по всему пролету. При такомъ предположеніи вѣсъ арки выйдетъ болѣе истиннаго.

Сумму натяженій наклонныхъ тягъ, подъ вліяніемъ односторонней нагрузки $p \,.\, l$, примемъ равной наибольшей суммѣ горизонтальныхъ слагающихъ всѣхъ тягъ (см. форм. **108**), т. е.

$$\frac{p \,.\, l^2}{2f}.$$

Среднюю длину наклонныхъ тягъ примемъ равною $1{,}5 \,.\, l$, что болѣе дѣйствительной величины. Тогда вѣсъ $n$ тягъ будетъ:

$$\frac{\gamma}{k} \cdot \frac{3}{4} p \cdot \frac{l^3}{f}.$$

При такихъ предположеніяхъ, согласно съ формулами **49** и **69**, вѣсъ арочной полуфермы съ $n$ наклонными тягами, получится:

$$V_a = \Phi \cdot \left[1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{p}{q} + \beta\left(1 + 4\frac{f^2}{l^2}\right)\right] \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{134}.$$

Принимая отношеніе $\frac{p}{q} = \frac{1}{3}$, получимъ:

$$V_a = \Phi \cdot \left[1.5 + \beta\left(1 + 4\frac{f^2}{l^2}\right)\right] \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{135}.$$

Для сравненія вѣса арочной и прямолинейной фермы, возьмемъ послѣдній для раціональной фермы 2-го класса (см. форм. **47**) при большомъ числѣ панелей, напр., при $n = 8$, какъ наиболѣе экономичной изъ остальныхъ прямыхъ фермъ. Это сравненіе для арочной фермы будетъ наиболѣе неблагопріятно.

Принимаемъ, какъ и ранѣе это дѣлали,

$$\frac{f}{l} = \frac{1}{2,5}; \qquad \beta = 1,5$$

$$r = 1,077; \qquad r^2 = 1,16.$$

Вѣсъ арочной фермы будетъ:

$$V_a = \frac{\gamma}{k} \cdot q \,.\, l^3 \,.\, 1,25\,(1,5 + 2,46) = \frac{\gamma}{k} \cdot q \,.\, l^3 \,.\, 1,25 \,.\, 3,96 \ldots \mathbf{136}.$$

Вѣсъ раціональной фермы 2-го класса при $n = 8$ получится:

$$V_{np.} = \frac{\gamma}{k} \cdot q \,.\, l^3 \,.\, 1,25\;(2,74 + 2,23) = \frac{\gamma}{k} \cdot q \,.\, l^3 \,.\, 1,25 \,.\, 5,03 \ldots \mathbf{137},$$

т.-е. *отношеніе вѣсовъ матеріала, идущаго на сжатіе и растяженіе арочной фермы и раціональной прямолинейной фермы 2-го класса при числѣ панелей 8, равняется почти 4 : 5, т.-е. послѣдняя тяжелѣе арочной на 25%.*

Въ отношеніи матеріала, идущаго на сопротивленіе сгибающимъ моментамъ, а равно и употребляемаго на соединеніе частей, арочныя фермы, какъ было показано, значительно легче прямолинейныхъ.

Въ арочныхъ фермахъ съ наклонными тягами, поперечное сѣченіе этихъ тягъ выходитъ очень незначительнымъ (отъ $\frac{3}{8}$ до $\frac{5}{8}$ дм.) и, какъ было сказано выше, для соединенія тягъ съ аркою употребляется очень простое соединеніе, состоящее или изъ болта съ ушкомъ, служащимъ для помѣщенія загнутаго конца тяги, или изъ простой петли, которою заканчивается сама тяга, причемъ эта петля проходитъ въ дыру, просверленную въ тѣлѣ арки.

Количество матеріала и работы, расходуемыхъ на такое соединеніе, очень не велико, и при разсчетѣ вѣса, оно съ избыткомъ покрывается той прибавкой въ усиліяхъ и длинѣ наклонныхъ тягъ, какая допущена была при разсчетѣ приблизительнаго вѣса арокъ. Небольшое количество излишняго матеріала, но зато съ цѣнной работой, расходуется на издѣліе стяжекъ, служащихъ для стягиванія хордъ послѣ ихъ сборки и, кромѣ того, часть добавочнаго матеріала идетъ на проволочное желѣзо для подвѣса тягъ съ цѣлью уничтожить ихъ провисаніе.

Располагая возможностью увеличивать число наклонныхъ тягъ безъ особаго увеличенія затраты на матеріалъ и издѣлія ихъ, можно значительно уменьшать сгибающіе моменты и тѣмъ самымъ облегчать вѣсъ арки.

Изъ предыдущихъ выводовъ ясно видно, что главная выгода арокъ, по сравненію съ прямоугольными фермами, заключается въ уменьшеніи сгибающихъ моментовъ. Какъ слѣдствіе такого вывода, является необходимость располагать обрѣшетину, несущую кровельный матеріалъ, по направленію вдоль оси арочной крыши, т.-е. избѣгать прогоновъ, такъ какъ при употребленіи прогоновъ равномѣрная нагрузка, передаваемая обрѣшетиной, производитъ сгибающіе моменты въ прогонахъ; послѣдніе въ свою очередь передаютъ аркѣ приходящуюся на нихъ нагрузку, какъ рядъ сосредоточенныхъ грузовъ, а эти послѣдніе вызываютъ сгибающіе моменты въ частяхъ арки, лежащей между прогонами. Такимъ образомъ при употребленіи прогоновъ потребуется опредѣленное количество матеріала, идущее на сопротивленіе сгибающимъ моментамъ. Если-же нагрузка передается непосредственно на арку (здѣсь говорится о постоянной нагрузкѣ), то сгибающихъ моментовъ нѣтъ.

Хотя увеличеніе работы при возрастаніи числа тягъ и не особенно значительно, но принимая въ разсчетъ, что вѣсъ матеріала, идущаго на сопротивленіе сгибающимъ моментамъ, уменьшается пропорціонально корню квадратному изъ величины момента, можно найти извѣстный предѣлъ, далѣе котораго при данномъ пролетѣ увеличивать число наклонныхъ тягъ не представляется экономичнымъ. Для сравненія вѣса арочныхъ и прямолинейныхъ фермъ, включая матеріалъ, сопротивляющійся сгибающимъ моментамъ, мы разсмотримъ тотъ случай, когда число тягъ таково, что величина сгибающаго момента для арки выходитъ приблизительно въ 4 раза меньше сгибающаго момента для прямолинейныхъ фермъ.

Принявъ это за основаніе сравнительнаго подсчета теоретическаго выраженія вѣсовъ, получимъ:

При разстояніи въ 7 фут. между узлами прямолинейной фермы, вѣсъ матеріала, сопротивляющагося сгибающимъ моментамъ, будетъ

$$0{,}022 \cdot l^2 \cdot 7 = 0{,}154 \cdot l \text{ пуд.}$$

Моментъ въ аркѣ, согласно принятому разсчету, будетъ въ 4 раза менѣе; слѣдовательно, вѣсъ идущаго на нес матеріала выйдетъ въ 2 раза меньше, т.-е. онъ будетъ равенъ $0{,}077\, l$ пуд.

При разстояніи между фермами въ 7 фут. и $q = 1$ пуд. на 1 кв. фут., какъ брали это и ранѣе, формула **136** обращается въ такую:

$$V_a = 0{,}0107 \,.\, l^2 \text{ пуд.}$$

Полный же вѣсъ матеріала, расходуемаго на арку, будетъ

$$V_1 = 0{,}0107 \,.\, l^2 + 0{,}077 \,.\, l. \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{138}$$

Для раціональной фермы 2-го класса вѣсъ опредѣлялся по формулѣ **65**:

$$V_2 = 0{,}0145 \,.\, l^2 + 0{,}25 \,.\, l.$$

Отношеніе $V_2 : V_1$ для большихъ пролетовъ выходитъ около **1,5.**

При малыхъ пролетахъ треугольная ферма строится безъ раскосовъ, а ферма арочная — безъ наклонныхъ тягъ. По принятому нами отношенію нагрузокъ сгибающій моментъ для арочной фермы будетъ въ 6 разъ менѣе, чѣмъ для треугольной.

Вѣсъ треугольной фермы безъ раскосовъ будетъ

$$0{,}0027 \,.\, l^2(1 + 1{,}5 \,.\, 1{,}16) = 0{,}0074 \,.\, l^2 \text{ пуд.}$$

Вѣсъ матеріала, сопротивляющагося сгибающимъ моментамъ, въ треугольной фермѣ былъ взятъ выше

$$0{,}022 \,.\, l^2 \text{ пуд.}$$

Полный вѣсъ треугольной фермы будетъ:

$$(0{,}0074 + 0{,}022) \,.\, l^2 = 0{,}0294 \,.\, l^2.$$

Вѣсъ арочной фермы безъ наклонныхъ тягъ будетъ

$$0{,}0027\,.\,l^2(1+1{,}5\,.\,1{,}64)=0{,}00924\,.\,l^2 \text{ пуд.}$$

Вѣсъ добавочнаго матеріала, сопротивляющагося дѣйствію сгибающихъ моментовъ, получится

$$0{,}009\,.\,l^2 \text{ пуд.},$$

такъ что полный вѣсъ арки безъ тягъ будетъ

$$0{,}01824\,.\,l^2.$$

Отношеніе вѣса треугольной фермы безъ раскосовъ къ вѣсу арочной фермы безъ наклонныхъ тягъ получается равнымъ

$$\frac{294}{182}=\text{около } 1{,}6.$$

Слѣдовательно можно принять вообще, что арочная ферма въ **1,5** раза легче прямолинейной.

Въ предыдущихъ сравненіяхъ прямолинейныхъ и арочныхъ фермъ было выведено теоретическое количество матеріала, необходимаго для сопротивленія усиліямъ сжатія, растяженія и сгибанія.

Въ главѣ о прямолинейныхъ фермахъ указывалось, что при издѣліи этихъ фермъ требуется еще добавочный матеріалъ вслѣдствіе того, что нѣтъ практической возможности придавать каждой отдѣльной части стропилъ такое именно сѣченіе, которое соотвѣтствовало-бы дѣйствующимъ въ этой части усиліямъ, и размѣры нѣкоторыхъ частей приходится увеличивать.

Измѣняя размѣры поясовъ при переходѣ отъ одной панели къ другой, сообразно дѣйствующимъ усиліямъ, пришлось-бы ставить каждый разъ накладки; онѣ требуютъ извѣстнаго количества добавочнаго матеріала; но, кромѣ того, онѣ еще и ослабляютъ полезное сѣченіе частей; вслѣдствіе этого выгоднѣе, въ смыслѣ работы и экономіи вѣса, употреблять однообразное сѣченіе въ нѣсколькихъ панеляхъ, разсчитанное по наибольшему усилію.

Въ сплошныхъ аркахъ, сдѣланныхъ изъ прокатнаго желѣза, разсчетъ вѣса которыхъ былъ сдѣланъ, исходя изъ однообразнаго сѣченія, таковаго излишняго матеріала нѣтъ; какъ самая арка, такъ и ея тяги имѣютъ по всей ихъ длинѣ однообразное сѣченіе, слѣдовательно, въ практикѣ отношеніе вѣсовъ арокъ и прямолинейныхъ фермъ будетъ еще выгоднѣе въ пользу арокъ. Но если арка состоитъ изъ 2-хъ поясовъ, связанныхъ между собою рѣшеткою, или сплошнымъ листомъ, приклепаннымъ къ поясамъ, то при ея устройствѣ также получается нѣкоторое опредѣленное количество матеріала, не вошедшее въ разсчетъ вѣса; кромѣ того, издѣліе такихъ арокъ, составленныхъ изъ склепанныхъ частей, обходится дороже работы прямолинейныхъ фермъ.

Во всѣхъ разсмотрѣнныхъ нами фермахъ поясъ сжатія сопротивляется сжимающимъ усиліямъ, въ зависимости отъ длины его отдѣльныхъ элементовъ панелей, узлы которыхъ разсматриваются какъ закрѣпленные концы сжимаемой части пояса.

Чтобы узлы фермъ представляли собою дѣйствительно закрѣпленныя точки, необходимо употреблять продольныя связи — прямыя и діагональныя — между стропильными фермами. Это особенно необходимо въ тѣхъ случаяхъ, гдѣ желѣзныя фермы имѣютъ деревянные прогоны и деревянную обрѣшетину. Въ случаѣ желѣзной обрѣшетины, приклепанной къ поясу сжатія фермы, прямыхъ связей ставить не нужно, но діагональныя соединенія остаются всетаки необходимыми.

Количество матеріала, употребляемаго при деревянной обрѣшетинѣ, на продольныя и діагональныя связи, составляетъ не менѣе 10 — 15% общаго вѣса фермъ, въ зависимости отъ пролета стропилъ.

# Комбинацiи разстоянiй между фермами и обрѣшетиной и величина панели.

Возьмемъ сперва случай желѣзной обрѣшетины. Наивыгоднѣйшiй профиль желѣза будетъ сѣченiе *зетъ*. Вѣсъ единицы длины этого профиля совершенно точно выражается формулою **57**. Зависимость между вѣсомъ и модулемъ для панели или для прогона можетъ быть выражена тою же формулою.

Пусть обозначаютъ

$e$ — разстоянiе между фермами,

$a$ — длина панели,

$c$ — разстоянiе, даваемое практикою между двумя обрѣшетинами; для кровельнаго желѣза, напр., $c =$ или менѣе 1,4 фут.

Сгибающiй моментъ для одной обрѣшетины

$$\frac{q \cdot c \cdot e^2}{8},$$

а модуль сопротивленiя ея

$$W = \frac{q}{k} \cdot \frac{c \cdot e^2}{8}.$$

Вѣсъ одной обрѣшетины будетъ (см. форм. **57**):

$$e \cdot v = e \cdot 0{,}12\sqrt{W} = \delta \cdot e^2 \cdot \sqrt{c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{139}.$$

гдѣ

$$\delta = 0{,}12\sqrt{\frac{q}{8 \cdot k}}.$$

Число обрѣшетинъ по длинѣ панели будетъ $a : c$.

Слѣдовательно, вѣсъ обрѣшетины, лежащей на площади $a \cdot e$ и приходящейся на каждую панель, выразится чрезъ

$$\delta \cdot \frac{a \cdot e^2}{\sqrt{c}}.$$

Вѣсъ панели $a$ выразится чрезъ

$$\delta \cdot a^2 \sqrt{e} \cdot$$

Общій вѣсъ матеріала, сопротивляющагося дѣйствію сгибающихъ моментовъ и приходящагося на площадь $a \cdot e$, будетъ:

$$\delta \left( \frac{a \cdot e^2}{\sqrt{c}} + a^2 \cdot \sqrt{e} \right),$$

а на единицу площади вѣсъ того же матеріала будетъ

$$v_0 = \delta \cdot \left( \frac{e}{\sqrt{c}} + \frac{a}{\sqrt{e}} \right) \cdot \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{140}.$$

Это выраженіе показываетъ, что:

1) *вѣсъ матеріала въ покрытіи, сопротивляющагося дѣйствію сгибающихъ моментовъ, отнесенный къ 1 площади покрытія, уменьшается съ уменьшеніемъ длины панели* $\boldsymbol{a}$ *и разстоянія между фермами* $\boldsymbol{e}$*;*

2) *практическій* **min** *этого вѣса получится тогда, когда* $\boldsymbol{a = e = c}$, *т.-е. когда обрѣшетины нѣтъ, а разстояніе между фермами равно разстоянію между обрѣшетинами, причемъ ферма разбита по панели длиною* $\boldsymbol{c}$.

Не трудно обнаружить, что и въ случаѣ деревянной обрѣшетины или сплошной обшивки изъ дерева, въ цѣляхъ уменьшенія вѣса матеріала, необходимо разбивать ферму на большое число панелей и разстояніе между фермами уменьшать до того предѣла, при достиженіи котораго дальнѣйшее уменьшеніе толщины дерева дѣлается уже невозможнымъ (напр., толщина обшивки не должна быть менѣе 1 дюйма). Этимъ условіемъ и выясняется теоретическій предѣлъ при выборѣ разстоянія между фермами.

Предыдущій выводъ сохраняетъ свою силу и въ томъ случаѣ, если ввести въ разсчетъ и сжимающія усилія панелей, такъ какъ эти усилія (а слѣдовательно, и вѣсъ частей) возрастаютъ незначительно съ увеличеніемъ числа панелей. Такъ, напр., при переходѣ отъ 8 къ 16 панелямъ (см. форм. **47** и **48**) теоретическій вѣсъ пояса сжатія возрастаетъ пропорціонально

$$1 - \frac{1}{n},$$

т.-е. съ $\frac{7}{8}$ коэффиціентъ пропорціональности переходитъ на $\frac{15}{16}$, между тѣмъ какъ, полагая $a = e$ и уменьшая величину ихъ вдвое, величину $v_0$ мы измѣнимъ пропорціонально отношенію

$$2{,}414 : 1{,}2.$$

Достиженіе этихъ наивыгоднѣйшихъ условій выполненія стропильныхъ фермъ при обыкновенныхъ, употреблявшихся до сихъ поръ въ практикѣ, конструкціяхъ стропилъ однако совершенно не возможно, ибо, съ одной стороны, съ уменьшеніемъ разстоянія между фермами, возрастаетъ приходящееся на 1 площади покрытія количество матеріала, которое идетъ на выполненіе стыковъ, а съ другой стороны, съ уменьшеніемъ длины панели возрастаетъ число раскосовъ и число связей между узлами фермъ.

*Единственный практически возможный путь для уменьшенія размѣровъ* ***a*** *и* ***e*** *въ покрытіяхъ заключается въ примѣненіи устройства* ***сѣтчатыхъ поверхностей,*** которыя, при самыхъ разнообразныхъ условіяхъ въ заданіи, по составленнымъ мною проектамъ и были построены конторою А. В. Бари на выставкѣ въ Н.-Новгородѣ *). Разсчетъ такихъ покрытій дѣлается на основаніи изложенной здѣсь теоріи арочныхъ покрытій.

---

*) См. описаніе этихъ покрытій—въ журналѣ *Техническій Сборникъ и Вѣстникъ Промышленности* за 1896 г., въ № 5, въ статьѣ профессора П. К. Худякова.

# Разсчетъ арочныхъ фермъ, принимая во вниманіе дѣйствіе вѣтра.

## Дѣйствіе вѣтра на арочную ферму. Опредѣленіе давленій на ея опоры.

Окончательныя формулы для разсчета арочныхъ фермъ были получены изъ общаго анализа въ томъ предположеніи, что односторонняя нагрузка равномѣрно распредѣлена на протяженіи отъ одной изъ опоръ до вершины фермы.

Въ примѣненіи общихъ формулъ къ отысканію величины искомыхъ усилій растяженія, сжатія и сгибающихъ моментовъ не встрѣтится никакихъ затрудненій и при всякомъ иномъ расположеніи равномѣрной нагрузки. Но кромѣ нея, подъ вліяніемъ дѣйствія вѣтра, арочныя фермы подвергаются еще дѣйствію и неравномѣрной нагрузки, которая, при извѣстныхъ условіяхъ, дѣлаетъ необходимымъ постановку добавочныхъ тягъ, или *вѣтровыхъ*.

Дѣйствіе вѣтра обыкновенно разлагается по направленію нормали и касательной къ разсматриваемой поверхности. Касательная слагающая, скользя по поверхности, производитъ слабыя усилія, зависящія отъ тренія воздуха, — дѣйствіе ея настолько не велико, что можетъ быть не разсматриваемо. Нормальное же усиліе собственно и принимается, какъ нагрузка отъ дѣйствія вѣтра.

Изъ многихъ практическихъ формулъ, дающихъ выраженіе нормальной слагающей, наиболѣе вѣроятной, хотя дающей и бóльшія величины, надо считать формулу *Лесселя* *)

$$p = p_0 . \, Sin \, \alpha \qquad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{141}$$

гдѣ $p_0$ — давленіе вѣтра на единицу площади, нормальной къ его направленію, и

---

*) Формула

$$p = p_0 . \, Sin^2 \alpha$$

при направленіи вѣтра подъ угломъ въ $10^0$ къ горизонту даетъ величины давленій, гораздо меньшія, чѣмъ формула *Лесселя* для угловъ $\alpha$ болѣе $5^0$.

$\alpha$ — уголъ, образуемый поверхностью съ направленіемъ вѣтра. Направленіе сильнаго вѣтра, на который и разсчитываются стропила, надо принимать горизонтальнымъ. При такихъ условіяхъ давленіе вѣтра на элементъ дуги $ds$ параболы въ произвольной точкѣ $E$ (фиг. 20) будетъ:

$$p_0 . \, Sin \; \alpha . ds = p_0 . tg \; \alpha . dx.$$

*Приближенное* значеніе момента этого усилія относительно точки $A$, въ случаѣ небольшого подъема, будетъ:

$$d M = p_0 . tg \; \alpha . x . dx \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{142.}$$

Точное значеніе момента

$$d M = p_0 . tg \; \alpha . (l - u) . \; Cos \; \alpha . dx \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{143}$$

По свойству параболы

$$l - x = x + 2 f . y . \frac{l - x}{x^2},$$

слѣдовательно

$$d M = p_0 . Sin \; \alpha \cdot \left[ x + 2 \cdot \frac{f^2}{l^4} (2 l x - x^2)(l - x) \right] \cdot dx \; \ldots\ldots \mathbf{144.}$$

Если бы принять это *точное* выраженіе момента, пришлось бы значительно усложнить всѣ послѣдующіе выводы, поэтому *мы ограничиваемся здѣсь приближеннымъ рѣшеніемъ,* достаточно вѣрнымъ для цѣлей практическаго разсчета, замѣняя формулу **144** болѣе простою **142**-ою. Это тѣмъ болѣе допустимо, что форм. **141** *не представляетъ собою точнаго математическаго выраженія эффекта отъ дѣйствія вѣтра.*

Производимое моментомъ $dM$ давленіе на опору $B$ будетъ:

$$2 l . d V_2 = p_0 . tg \; \alpha . x . dx = p_0 \cdot \frac{2f}{l^2} (l - x) . x . dx \, . \; . \; . \; . \quad \mathbf{145.}$$

Интегрированіе этого ур-ія, при измѣненіи $x$ въ предѣлахъ отъ $o$ до $l$, даетъ:

$$\left. \begin{array}{l} V_2 = \dfrac{1}{6} \cdot p_0 \cdot f \\[2ex] V_1 = \dfrac{5}{6} \cdot p_0 \cdot f \end{array} \right| \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{146.}$$

## Опредѣленіе натяженій тягъ.

Послѣ того какъ найдены давленія на опоры отъ дѣйствія вѣтра, зависящія, какъ видно, только отъ подъема $f$ арки, а не отъ пролета ея, можно будетъ опредѣлить натяженіе всѣхъ тягъ, до $H_{n-1}$ включительно, по даннымъ ранѣе формуламъ, внося въ нихъ новое значеніе $V_2$, которое устанавливаетъ зависимость всѣхъ натяженій тягъ также отъ $f$, тогда какъ при равномѣрной нагрузкѣ этой зависимости не существовало.

Упомянутымъ въ общемъ анализѣ путемъ опредѣляется натяженіе всѣхъ тягъ, причемъ каждый разъ измѣняется лишь выраженіе момента нагрузки относительно разсматриваемой точки.

При отысканіи натяженія $H_n$ надо ввести моментъ нагрузки при измѣненіи $x$ отъ $l$ до $a_n$ относительно узла $(n+1)$ на фиг. 17. Величина этого момента будетъ:

$$\frac{2f}{l^2}\cdot p_0 \cdot \int_l^{a_n} (l-x)(x-a_n)\cdot dx = p_0 \cdot \frac{2f}{l^2}\cdot \frac{(a_n-l)^3}{6} =$$

$$= 2\cdot V_2 \cdot \frac{(a_n-l)^3}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{147.}$$

Внося это значеніе момента въ общую формулу, опредѣляющую $H_n$ (см. выводъ ф-лы **100**), получимъ:

$$H_n = V_2 \cdot \frac{l^2}{f\cdot a_n}\cdot\left[2l\cdot\frac{2l-a_{n-1}-a_n}{(2l-a_{n-1})(2l-a_n)} - \frac{(l-a_n)^2}{l^2}\right] \ldots\ldots \mathbf{148.}$$

$$\sum_0^n H = V_2 \cdot \frac{l^2}{f}\left(\frac{2l-a_n}{l^2}+\frac{1}{2l-a_n}\right) \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{149.}$$

Такимъ же образомъ, какъ и ранѣе было указано, могутъ быть опредѣлены натяженія и всѣхъ остальныхъ тягъ

отъ $H_{n+1}$ до $H_{2n}$.

Въ случаѣ равномѣрной нагрузки на полупролетѣ, натяженіе всѣхъ тягъ, имѣющихъ нумеръ $(n+2)$ и выше, равнялось нулю (см. форм. **106**), между тѣмъ какъ при неравномѣрной нагрузкѣ, какъ это видно, сколько бы ни провести тягъ, соединяющихъ половину дуги арки съ ближайшей опорой, всѣ эти тяги будутъ имѣть натяженіе. Отсутствіе этихъ тягъ будетъ вызывать добавочный сгибающій моментъ въ нагруженной части арки; и если общая величина сгибающихъ моментовъ будетъ здѣсь превосходить опредѣленное выбранное значеніе, то для уменьшенія сгибающихъ моментовъ необходимо проводить добавочныя вѣтровыя тяги, число которыхъ, какъ увидимъ ниже, вообще говоря, должно быть менѣе числа тягъ, идущихъ къ ненагруженной сторонѣ арки.

Въ дальнѣйшемъ необходимо разсмотрѣть опредѣленіе натаженія произвольной вѣтровой тяги, взявши для этого моментъ силъ относительно произвольной точки ненагруженной стороны арки.

Предположимъ, что тяга $H_n$ проходитъ чрезъ вершину арки, т. е. $a_n = l$. Выберемъ за центръ моментовъ произвольную точку $m$ (фиг. 20) нагруженной стороны арки, опредѣляемую абсциссой $b_m$ относительно лѣвой опоры, и составимъ по вышеуказанному способу выраженіе $H_n$ (см. выводъ форм. **100**):

$$V_2 \cdot \left[2\,l - b_m - b_m \cdot \frac{2\,(2\,l - b_m) - a_{n-1}}{2\,l - a_{n-1}} - 2\,(l - b_m)^3\right] =$$

$$= H_n \cdot \frac{f}{l^2} \cdot b_m (l - b_m) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{150.}$$

Это выраженіе получается изъ общаго, замѣняя тамъ координату $a_n$ узла тяги чрезъ $l$ (относительно правой опоры), а координату $a_k$ центра моментовъ чрезъ $b_m$ (относительно лѣвой опоры). Послѣ алгебраическихъ преобразованій получимъ:

$$H_n = H_l = V_2 \cdot \frac{l^2}{f} \cdot \frac{2}{b_m}\left[1 - \frac{b_m}{2l - a_{n-1}} - \frac{(l - b_m)^2}{l^2}\right].$$

Или

$$H_l = V_2 \cdot \frac{2\,l^2}{f} \cdot \left[\frac{2l - b_m}{l^2} - \frac{1}{2l - a_{n-1}}\right] \quad . \; . \; . \; . \; \mathbf{151.}$$

Слѣдовательно, при $a_n = l$ для опредѣленія натяженій всѣхъ послѣдующихъ тягъ имѣемъ слѣдующее:

$$\sum_0^l H = V_2 \cdot \frac{2\,l^2}{f} \cdot \frac{2\,l - b_m}{l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{152.}$$

$$\sum_1^l H \cdot a = V_2 \cdot \frac{l^2}{f} \cdot \frac{3\,l - 2\,b_m}{l} \quad . \; . \; . \; . \; \mathbf{152,a.}$$

Если въ вышеупомянутой точкѣ $m$ съ координатой $b_m$ имѣется тяга $H_{mb}$, то, разсматривая выраженіе момента относительно центра моментовъ съ координатой $b_{m-1}$, получимъ общее выраженіе:

$$H_{bm} = V_2 \cdot \frac{2\,l^2}{f} \cdot \frac{l - b_{m-1}}{l^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{153.}$$

## Сгибающіе моменты въ аркѣ съ одной горизонтальной тягой (безъ наклонныхъ).

Въ случаѣ арки *съ одной горизонтальной тягой* (безъ наклонныхъ), натяженіе ея найдемъ, пользуясь форм. **146**:

$$H_0 = V_2 \cdot \frac{l}{f} = \frac{1}{6} \cdot p_0 \cdot l \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{154}.$$

Моментъ $m$ давленія вѣтра на дугу $AE$ (фиг. 20) относительно точки $E$ найдемъ, какъ алгебраическую сумму элементарныхъ моментовъ, выраженіе которыхъ составлено для произвольной точки $D$ (фиг. 20) съ абсциссой $z$ такимъ образомъ:

сила . . . . . . . . . . . . $p_0 \cdot \frac{2f}{l^2} \cdot (l - z) \cdot dz$,

а плечо ея . . . . . . . . $x - z$.

Суммируя величины этихъ элементарныхъ моментовъ при измѣненіи $z$ въ предѣлахъ отъ $o$ до $x$, получимъ:

$$m = \frac{2f}{l^2} \cdot p_0 \cdot \int_0^x (l - z)(x - z) \cdot dz = p_0 \cdot \frac{2f}{l^2} \cdot \left(\frac{l \cdot x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right) \ldots \mathbf{155}.$$

Моментъ въ сѣченіи $E$ (фиг. 20) будетъ:

$$M = V_1 \cdot x - m - H_0 \cdot y.$$

Послѣ алгебраическихъ преобразованій этого ур-ія получимъ:

$$M = \frac{1}{6} \cdot p_0 \cdot f \cdot x \cdot \frac{3\,l^2 - 5\,l \cdot x + 2\,x^2}{l^2} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{156}.$$

Наибольшее значеніе $M$ получится при

$$x = \frac{l}{6}(5 - \sqrt{7}) = \text{около } 0{,}4\,l.$$

$$max\, M = 0{,}088 \cdot p_0 \cdot f \cdot l \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{157}.$$

Въ случаѣ прямолинейной фермы, при тѣхъ же данныхъ относительно дѣйствія вѣтра, и въ той же части арки получимъ:

$$max\, M = \frac{1}{8} \cdot p_0 \cdot f \cdot l \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{158},$$

т. е. *въ параболической аркѣ разсчетный моментъ отъ дѣйствія вѣтра будетъ въ нагруженной сторонѣ арки въ $1^1/_2$ раза меньше, чѣмъ въ прямолинейной фермѣ.*

Для произвольной точки ненагруженной стороны арки съ одною горизонтальною тягою будемъ имѣть выраженіе момента:

$$M_1 = V_2\,(2\,l - x) - H_0 \,.\, y, \quad \text{или}$$

$$M_1 = \frac{1}{6}\cdot p_0 \cdot f \cdot (2l - x)\left(1 - \frac{x}{l}\right) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{159.}$$

При $x = \frac{3}{2}\,l$ получимъ:

$$max\, M_1 = \frac{1}{24}\cdot p_0 \cdot f \cdot l \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; \mathbf{160.}$$

## Сгибающіе моменты въ аркѣ съ наклонными тягами

### Ненагруженная вѣтромъ сторона арки.

Общій видъ выраженій моментовъ $max.\, M_m$ въ зависимости отъ давленія $V_2$ остается тотъ же самый, который былъ данъ формулой **116**, только значеніе $V_2$ перемѣняется

$$\text{съ} \;\; \frac{1}{4}\cdot p \cdot l \qquad \text{на} \;\; \frac{1}{6}\cdot p_0 \cdot f,$$

и всѣ эти моменты дѣлаются пропорціональными $f$, подъему крыши, чего не было при нагрузкѣ, равномѣрно распредѣленной по полупролету.

### Нагруженная вѣтромъ сторона арки.

*a. Точки подвѣса тягъ на правой и лѣвой сторонѣ арки расположены симметрично.*

На протяженіи отъ вершины арки до узла $(n+1)$ на фиг. 17, т.-е. при измѣненіи $x$

$$\text{отъ} \;\; l \qquad\qquad \text{до} \;\; a_n,$$

выраженіе момента будетъ писаться такъ (см. форм. **92** и **147**):

$$M_{1+n} = M_n - H_n \cdot \frac{f}{l^2}\cdot (2\,l - x)(x - a_n) - p_0 \cdot \frac{2\,f}{l^2}\cdot \frac{(l - x)^3}{6}.$$

Послѣ алгебраическихъ преобразованій получимъ:

$$M_{n+1} = V_2 \cdot x \cdot \frac{a_n - x}{l}\left(4 - \frac{a_n}{l} - \frac{2x}{l} - \frac{l}{2\,l - a_n}\right) . \; . \; . \; \mathbf{161.}$$

На всемъ протяженіи между вершиною арки и узломъ $(n+1)$ на фиг. 17 моментъ сохраняетъ отрицательное значеніе, а въ этомъ послѣднемъ узлѣ онъ равенъ нулю.

Наибольшее значеніе этого момента можетъ быть опредѣлено приближенно, но съ достаточною для практическихъ цѣлей точностію, въ предположеніи $x = l$ подобно тому, какъ это дѣлалось при нагрузкѣ, равномѣрно распредѣленной на полупролетѣ; тогда

$$max\ M'_{n+1} = -V_2 \cdot (l - a_n)\left(\frac{2\,l - a_n}{l} - \frac{l}{2\,l - a_n}\right) \ldots \mathbf{162.}$$

Необходимо, чтобы величина этого момента не превосходила того, который получается при заданной равномѣрной нагрузкѣ.

Если тяги $H_{n+1}$ нѣтъ, то и здѣсь такъ же, какъ и при равномѣрной нагрузкѣ, $M_{n-1}$ сохраняетъ видъ своего выраженія въ предѣлахъ измѣненія $x$ отъ $a_n$ до нуля, причемъ величина момента въ этихъ предѣлахъ остается положительной, а наибольшее его значеніе получится при $x$, опредѣляемомъ изъ ур-ія

$$\frac{d\,M_{n+1}}{d\,x} = 0.$$

Оно приводится къ виду.

$$\left.\begin{aligned} & x^2 - \beta \cdot x + \gamma = 0 \\ & \beta = \frac{l}{3}\left(4 + \frac{a_n}{l} - \frac{l}{2\,l - a_n}\right) \\ & \gamma = \frac{1}{6}\left(4\,l \cdot a_n - a_n^2 - \frac{l^2 \cdot a_n}{2\,l - a_n}\right) \end{aligned}\right| \ldots\ldots \mathbf{163.}$$

Найденную изъ этого ур-ія величину $x$ слѣдуетъ затѣмъ внести въ форм. **161**, тогда и получимъ точное выраженіе *max* момента при данномъ значеніи $a_n$. Но этотъ путь рѣшенія, сопровождаемый цѣлымъ рядомъ алгебраическихъ выкладокъ, весьма длиненъ. Можно ввести слѣдующія упрощенія:

При значеніяхъ $a_n$, близкихъ или $= l$, ур-іе **163** даетъ

$$x = \frac{1}{3} \cdot l \ldots\ldots\ldots\ldots \mathbf{164.}$$

Эту величину и примемъ для всѣхъ значеній $a_n$, которыя, какъ извѣстно изъ общей теоріи арочныхъ фермъ, могутъ измѣняться отъ

$\frac{2}{3} \cdot l$,— въ случаѣ одной наклонной тяги, до $l$ — въ случаѣ большого числа тягъ. Тогда по форм. **161** получимъ:

$$max.\ M_{n+1} = V_2 \cdot \frac{3\,a_n - l}{9} \cdot \left(3{,}33 - \frac{a_n}{l} - \frac{l}{2\,l - a_n}\right) \quad . \quad . \quad \mathbf{165.}$$

Для болѣе быстрыхъ предварительныхъ разсчетовъ вмѣсто этой формулы можно пользоваться еще болѣе упрощенной формулой:

$$max.\ M_{n+1} = \text{приблизительно}\ V_2 \cdot 0{,}3 \cdot a_n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{166.}$$

Для сравненія результатовъ вычисленія приводимъ такія данныя:

| $a_n : l.$ | Величины $M_{n+1} : V_2 \cdot l.$ | | |
|---|---|---|---|
| | Истинное значеніе. | По форм. 165. | По форм. 166. |
| $\frac{2}{3}$ | 0,217 | 0,213 | 0,20 |
| 1 | 0,296 | 0,296 | 0,30 |

Если имѣется тяга $H_{n+1}$, то, начиная отъ точки съ абсциссой $x = a_{n-1}$, значеніе момента будетъ:

$$M_{n+2} = M_{n+1} - H_{n+1} \cdot z \Big|_{n+1}^{x} =$$

$$= M_{n+1} - H_{n+1} \cdot \frac{f}{l^2} \cdot x\,(a_{n-1} - x),$$

гдѣ $x$ считается отъ опоры $A$ (фиг. 17). Послѣ преобразованій получаемъ:

$$M_{n+2} = 2\,V_2 \cdot x \cdot \frac{(a_n - x)(a_{n-1} - x)}{l^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathbf{167.}$$

Величина этого момента между точками съ абсциссами $a_n$ и $a_{n-1}$ отрицательна.

Если тяга $H_{n+2}$ отсутствуетъ, то выраженіе послѣдняго момента сохраняетъ свой видъ на всемъ протяженіи арки между узлами $(n+2)$ и $A$ (фиг. 17), причемъ знакъ момента измѣняется съ минуса на плюсъ.

### Нагруженная вѣтромъ сторона арки.

*б. Точки подвѣса вѣтровыхъ тягъ расположены несимметрично съ точками подвѣса тягъ ненагруженной стороны.*

Опредѣленіе сгибающихъ моментовъ въ нагруженной сторонѣ арки, имѣющей нѣсколько вѣтровыхъ тягъ, точки привѣса которыхъ расположены несимметрично съ точками привѣса тягъ ненагруженной стороны, дѣлается такъ же, какъ и ранѣе, т. е. составляя ур-ія моментовъ относительно выбранныхъ точекъ привѣса тягъ.

Разсмотримъ тотъ случай, когда одна изъ вѣтровыхъ тягъ проходитъ чрезъ вершину $c$ арки (фиг. 20), т. е. при опредѣленіи момента, положимъ

$$a_n = l$$

въ общей формулѣ, подобной той, изъ которой получилась непосредственно формула **161**. Если ближайшая къ вершинѣ тяга будетъ $m\,A$ съ координатами точки привѣса ея

$$h_m \text{ и } b_m,$$

то сгибающій моментъ въ произвольномъ сѣченіи дуги $c\,m$ (фиг. 20) будетъ писаться такъ:

$$M_{cm} = M_n - H_n(2\,l - x)(l - x) \cdot \frac{f}{l^2} - 2\,V_2 \cdot \frac{(l-x)^3}{l^2},$$

гдѣ $M_n$ и $H_n$ — величины момента и горизонтальной слагающей натяженія тяги при точкѣ $c$. Послѣ алгебраическихъ преобразованій предыдущее равенство обращается въ слѣдующее:

$$M_{cm} = 2\,V_2 \cdot x \cdot \frac{l - x}{l} \cdot \frac{b_m - x}{l} \,.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; \mathbf{168.}$$

Приравнявъ нулю 1-ю производную этого выраженія по $x$, найдемъ, что *max* момента получится тогда, когда

$$x_{cm} = \frac{1}{3}(l + b_m + \sqrt{b_m^2 - b_m \cdot l + l^2}) \,.\;.\;.\;.\;.\; \mathbf{169.}$$

При отношеніи $l : b_m$, измѣняющемся на практикѣ въ предѣлахъ отъ 1,25 до 2, выраженіе максимальнаго момента, съ ошибкою менѣе 2%, можно представить такой простой формулой:

$$max.\, M_{cm} = -V_2 \cdot \frac{l + b_m}{4}\left(\frac{l - b_m}{l}\right)^2 .\;.\;.\;.\;.\;. \mathbf{170.}$$

Пусть слѣдующая точка привѣса вѣтровой тяги будетъ $k$ (фиг. 20) съ координатами

$$h_{m-1} \text{ и } b_{m-1}.$$

Натяженiе $H_{bm}$ тяги, идущей изъ узла $A$ въ $m$ (фиг. 20) было дано формулой **153**. Сгибающiй моментъ въ произвольномъ сѣченiи дуги $mk$ будетъ писаться такъ:

$$M_{mk} = M_{cm} - H_{bm} \cdot \frac{f}{l^2} \cdot x\,(b_m - x) =$$

$$= 2 \cdot V_2 \cdot x \cdot \frac{b_m - x}{l} \cdot \frac{b_{m-1} - x}{l} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{171.}$$

Наибольшее значенiе этого момента, подобно предыдущему, получится для сѣченiя, гдѣ

$$x_{mk} = \frac{1}{3}\left(b_m + b_{m-1} + \sqrt{b_m^2 - b_m \cdot b_{m-1} + b_{m-1}^2}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{172.}$$

Если имѣются лѣвѣе точки $k$ (фиг. 20) еще другiя вѣтровыя тяги, тогда тѣмъ же путемъ будутъ опредѣлены моменты и въ остальныхъ частяхъ дуги арки, лежащихъ между двумя смежными тягами.

Если же лѣвѣе точки $k$ тягъ болѣе нѣтъ, то и во всей остальной части дуги, т. е. въ части $Ak$, выраженiе момента останется то же, что и между точками $m$ и $k$, только $max$ момента будетъ при другомъ значенiи $x$, а именно:

$$x_{kA} = \frac{1}{3}\left(b_m + b_{m-1} - \sqrt{b_m^2 - b_m \cdot b_{m-1} + b_{m-1}^2}\right) \quad . \; . \; . \; . \quad \mathbf{173.}$$

При однообразномъ сѣченiи арки необходимо, чтобы наибольшiе сгибающiе моменты въ частяхъ ея $kA$ и $km$ были равны. Это условiе удовлетворяется при существованiи равенства

$$b_{m-1} = \frac{1}{2} \cdot b_m \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathbf{174.}$$

Тогда формула **171** приметъ видъ:

$$M_{mk} = M_{kA} = 2\, V_2 \cdot x \cdot \frac{b_m - x}{l} \cdot \frac{0{,}5 \,.\, b_m - x}{l} \quad . \; . \; . \; . \quad \mathbf{175.}$$

Наибольшее значеніе этого момента получится:
въ части $k\,m$ при значеніи

$$x_{km} = b_m\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3{,}5}\right) = \frac{5{,}5}{7} \cdot b_m,$$

а въ части $k\,A$ при значеніи

$$x_{kA} = b_m\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3{,}5}\right) = \frac{1{,}5}{7} \cdot b_m.$$

При этихъ значеніяхъ $x$, $max$ момента будетъ

$$max.\ M = \pm 2\,V_2 \cdot \frac{1{,}5}{7} \cdot \frac{5{,}5}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{b_m^3}{l^2} =$$

$$= \text{приблиз.}\ \frac{1}{10} \cdot V_2 \cdot \frac{b_m^3}{l^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{176}.$$

Если ту же величину наибольшаго момента удержать и для части $m\,c$, то, на основаніи равенствъ **170** и **176**, надо написать, что:

$$\frac{1}{10} \cdot V_2 \cdot \frac{b_m^3}{l^2} = V_2 \cdot \frac{l + b_m}{4} \cdot \left(\frac{l - b_m}{l}\right)^2 \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{177}.$$

Это ур-іе даетъ приблизительно

$$b_m = \frac{1}{1{,}41} \cdot l. \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{178}.$$

Принявши это соотношеніе, разсчетный моментъ для всей нагруженной вѣтромъ стороны, при двухъ вѣтровыхъ тягахъ ($c\,A$ и $m\,A$), получимъ въ такомъ окончательномъ видѣ:

$$max.\ M = \text{прибл.}\ \frac{1}{28} \cdot V_2 \cdot l \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{179}.$$

Если, кромѣ тягъ $c\,A$ и $m\,A$, будетъ существовать еще тяга $k\,A$, то, аналогично съ предыдущимъ, найдемъ:

$$l : b_m : b_{m-1} = 1{,}78 : 1{,}41 : 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{180}$$

и разсчетный моментъ для нагруженной стороны арки

$$max.\ M = \text{прибл.}\ \frac{1}{57} \cdot V_2 \cdot l \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{181}.$$

Для предварительныхъ соображенiй о числѣ вѣтровыхъ тягъ $n_1$, которое надо провести въ нагруженной половинѣ арки, съ достаточною вѣрностiю можно пользоваться слѣдующею приближенною формулою:

$$max.\ M = \frac{1}{6 \cdot n_1^2} \cdot V_2 \cdot l \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ 182.$$

## Число тягъ, идущихъ отъ каждаго опорнаго узла къ дальней и ближней половинамъ арки.

Вопросъ о числѣ тягъ рѣшается въ зависимости отъ заданныхъ нагрузокъ.

При назначенiи данныхъ числовыхъ величинъ для односторонней и полной нагрузокъ арочныхъ покрытiй, надо имѣть въ виду слѣдующее:

*Давленiе самаго сильнаго вѣтра* (буря) принимается:

$$p_0 = 125 \text{ килогр. на 1 кв. мт.}$$

$$= 0{,}7 \text{ пуд. на 1 кв. фут.}$$

Слѣдовательно, основное данное для разсчета моментовъ нагруженной стороны давленiемъ $p_0$ будетъ:

$$V_2 = \frac{1}{6} \cdot p_0 \cdot f = 21 \cdot f,$$

если $V_2$ — въ кгр., а $f$ — въ мт.

$$V_2 = 0{,}117 \cdot f,$$

если $V_2$ — въ пуд., а $f$ — въ фут.

Эта величина $V_2$ будетъ вычислена примѣнительно къ каждому погонному метру (или футу соотвѣтственно) ширины полосы крыши, передающей давленiе на стропильную ферму.

*Нагрузка отъ снѣга,* распредѣленная равномѣрно по всему пролету, считается обыкновенно равною

75 кгр. на 1 кв. мт., или

0,42 пуд. на 1 кв. фут.

Неравномѣрное распредѣленiе снѣга по обоимъ скатамъ крыши можетъ дать одностороннюю нагрузку, величина которой, вообще говоря, будетъ незначительна. Односторонняя нагрузка снѣга возможна только въ томъ случаѣ, когда сильный вѣтеръ снесетъ весь снѣгъ съ той стороны крыши, на которую онъ дуетъ.

Такъ какъ цифра 0,42 пуд. на 1 кв. футъ соотвѣтствуетъ накопленію снѣга за долгій періодъ времени, то нѣтъ вѣроятности предполагать, что въ теченіе этого долгаго періода времени будетъ падать снѣгъ въ тихую погоду, и что затѣмъ поднимется вѣтеръ, который сразу снесетъ весь снѣгъ съ одной стороны, не тронувъ его на противоположной сторонѣ.

При подъемѣ арокъ, большемъ $\frac{1}{6}$ ихъ пролета, т. е.

$$\text{при } f \text{ болѣе } \frac{l}{3},$$

снѣгъ съ концовъ крыши сползаетъ (уголъ скольженія снѣга считается около $35^0$).

Въ случаѣ сильнаго вѣтра, снѣгъ сдувается, какъ съ вершины арки, такъ и съ той стороны, откуда дуетъ вѣтеръ, такъ что, вообще говоря, совокупнаго дѣйствія сильнаго вѣтра (особенно урагана) и односторонней нагрузки снѣга на одну и ту же половину арки быть не можетъ.

Единственное исключеніе можетъ быть въ случаѣ такъ называемаго „*мокраго снѣга*", прилипающаго къ крышѣ и наносимаго бурею. Наибольшая величина такого односторонняго груза можетъ быть около $\frac{1}{3}$ полной нагрузки отъ снѣга, т. е.

$$p = \frac{0{,}42}{3} = 0{,}14 \text{ пуд. на 1 кв. фут.}$$

лишь для арокъ, подъемъ которыхъ не превышаетъ $\frac{1}{5}$ ихъ пролета.

Такъ какъ односторонній грузъ снѣга расположенъ на полупролетѣ арки равномѣрно, то въ нагруженной сторонѣ онъ не дастъ сгибающихъ моментовъ, а моменты ненагруженной стороны будутъ разсчитываться по добавочной нагрузкѣ (въ пуд.)

$$\frac{1}{4} \cdot p \cdot l = 0{,}035 \cdot l,$$

гдѣ $l$ — въ фут.

Слѣдовательно, моменты ненагруженной стороны должны быть опредѣлены по давленію на опору

$$V_2 = 0{,}117 \,.\, f + 0{,}035 \,.\, l$$

на 1 погонный футъ ширины полосы крыши, отнесенной къ одной фермѣ, если $f$ и $l$ — въ фут., а $V_2$ — въ пуд.

Или же

$$V_2 = 21 \,.\, f + 0{,}625 \,.\, l$$

на 1 погонный мт. ширины полосы крыши, отнесенной къ 1 фермѣ, если $f$ и $l$ — въ мт., а $V_2$ — въ кгр.

Для сохраненія однообразныхъ сѣченій въ аркѣ, необходимо, чтобы разсчетные сгибающіе моменты въ обѣихъ половинахъ арки были равны. Слѣдовательно, если будемъ обозначать:

$n$ — число тягъ, идущихъ отъ опорнаго узла къ дальней половинѣ арки, а

$n_1$ — къ ближней половинѣ, то должны имѣть:

$$\frac{0{,}117 \,.\, f + 0{,}035 \,.\, l}{4 \,.\, n^2} = \frac{0{,}117 \,.\, f}{6 \,.\, n_1^2} \quad \ldots\ldots \quad \mathbf{183.}$$

При $f = \frac{2\, l}{6}$, находимъ:

$$\frac{n}{n_1} = \text{около } 1{,}75 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \mathbf{184.}$$

Слѣдовательно, число вѣтровыхъ тягъ у арки выходитъ почти въ 2 раза менѣе противъ числа тягъ, соединяющихъ опору съ противоположной половиной дуги; и на практикѣ, даже при самыхъ большихъ пролетахъ, не приходится ставить болѣе двухъ или трехъ вѣтровыхъ тягъ, считая въ томъ числѣ и тягу, проходящую чрезъ вершину.

Для большей надежности, имѣя въ виду случайное возможное накопленіе снѣга на арочной фермѣ, слѣдуетъ:

1) разсчитывать тяги ненагруженной ея стороны на одностороннюю равномѣрную нагрузку, слагающуюся изъ дѣйствія вѣтра, сложеннаго съ давленіемъ отъ снѣга въ $\frac{1}{3}$ пуда на 1 кв. футъ;

2) тяги же вѣтровыя должны быть разсчитаны только на дѣйствіе вѣтра, вовсе не принимая во вниманіе нагрузки отъ снѣга.

На фиг. 21 изображена арочная ферма съ полнымъ числомъ тягъ при $n = 4$ и $n_1 = 2$.

## Заключеніе.

Всѣ вышеприведенныя соображенія относительно разсчета арочныхъ стропилъ были ведены, предполагая существованіе шарнирныхъ соединенiй въ мѣстахъ прикрѣпленія тягъ къ дугѣ арки. Въ дѣйствительности же арочная ферма представляетъ собою сплошную упругую арку, почти не ослабленную привѣсомъ тягъ. Но разница между опредѣляемыми по формуламъ и дѣйствительными напряженіями будетъ въ этомъ случаѣ совершенно аналогична съ таковою же разницею и для прямолинейныхъ стропилъ, гдѣ также поясъ сжатія вмѣсто разсматриваемаго ряда сочлененныхъ шарнирами частей представляетъ собою сплошную балку. Въ случаѣ сплошныхъ какъ арочныхъ, такъ и прямолинейныхъ поясовъ, сгибающіе моменты въ частяхъ дугъ и панелей будутъ меньше, чѣмъ при существованіи шарнировъ. Подробный теоретическій разборъ разсчета сплошныхъ арокъ съ наклонными тягами потребовалъ бы весьма сложныхъ выводовъ, которые приведутъ къ конечнымъ формуламъ, скорѣе всего только вѣроятнымъ, чѣмъ вѣрнымъ; а потому гораздо надежнѣе будетъ — ограничиться въ разсчетахъ формулами, основанными на предположеніи, что въ мѣстахъ привѣса тягъ существуютъ шарниры.

Примѣненіе вышеприведенныхъ формулъ требуетъ, чтобы одинъ конецъ фермы могъ свободно скользить по опорѣ, дабы избѣжать добавочныхъ усилій, вызываемыхъ измѣненіями длины частей фермы при измѣненіяхъ температуры.

При устройствѣ арокъ и ихъ установкѣ необходимо обращать главное вниманіе на положеніе тягъ. Избыточное натяженіе ихъ можетъ вызвать появленіе добавочныхъ усилій, на дѣйствіе которыхъ части фермы не разсчитаны; то же самое можетъ произойти при чрезмѣрномъ ослабленіи тягъ. Для устраненія возможнаго произвола въ натяженіи тягъ, полезно употреблять въ этомъ случаѣ для тягъ не жесткія стяжки, а предложенныя нами упругія стяжки.

**Вл. Шуховъ.**

27 января 1897 г.

# Оглавленіе.

## Арочныя фермы съ тремя тягами.



## Параболическія фермы съ произвольнымъ числомъ тягъ.

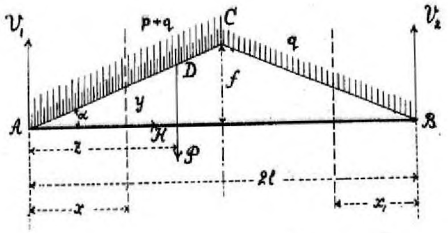


## Разсчетъ арочныхъ фермъ, принимая во вниманіе дѣйствіе вѣтра.

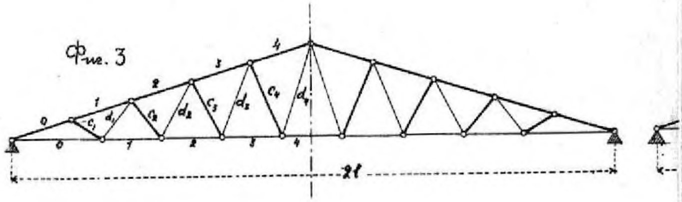
# Замѣченныя опечатки.

| *Страница.* | *Строка.* | *Напечатано.* | *Слѣдуетъ читать.* |
|---|---|---|---|
| 16 | 6 снизу | расколами. | раскосами. |
| 22 | 3 „ | — | закрыть большую скобку. |
| 25 | 13 „ | $q\,l$ | $q\,l^3$ |
| 26 | 3 „ | — | $S_m =$ и т. д. |
| 54 | 7 сверху | опоры | отъ опоры |
| 69 | 3 снизу | ур-іе *82* | ур-іе *81,a.* |
| — | — | Табл. 2, фиг. 16—уголъ при точкѣ $D$ между касательной и горизонталью $= \beta$. | |
| 73 | 6 снизу | По формулѣ *87* | По формулѣ *78* |
| 76 | 2 сверху | оп горизонтали | по горизонтали |
| 80 | 6 „ | $V_1 \cdot a_1$ | $V_2 \cdot a_1$. |
| 83 | 3 снизу | ординатами | координатами |
| 93 | 3 „ | — | $max\ M''_{n+1} = 0$. |
| 94 | 6 сверху | Въ 1-й скобкѣ знаменателя должно стоять $a_{n-1}$ | |

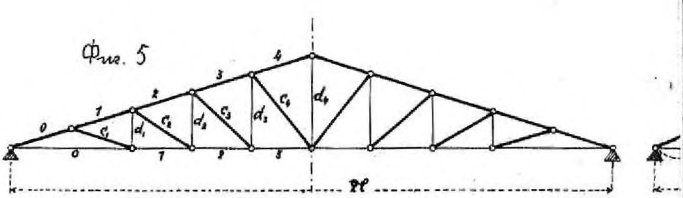
Фиг. 1



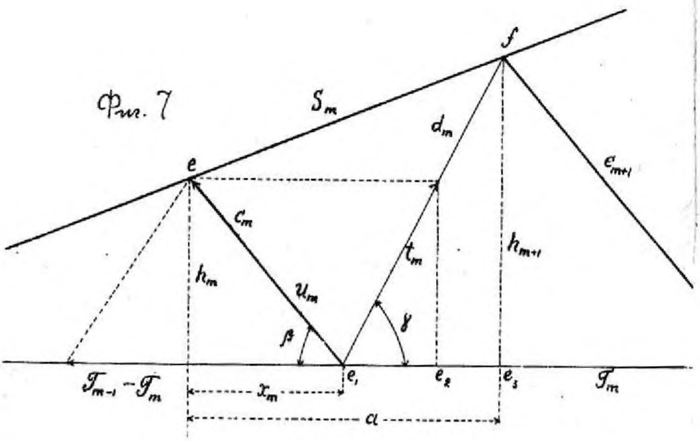

Фиг. 3

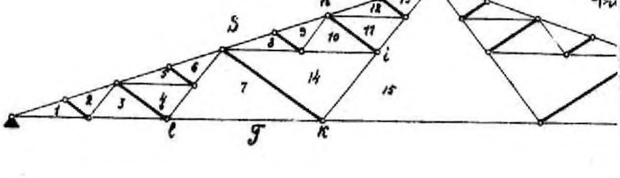



Фиг. 5

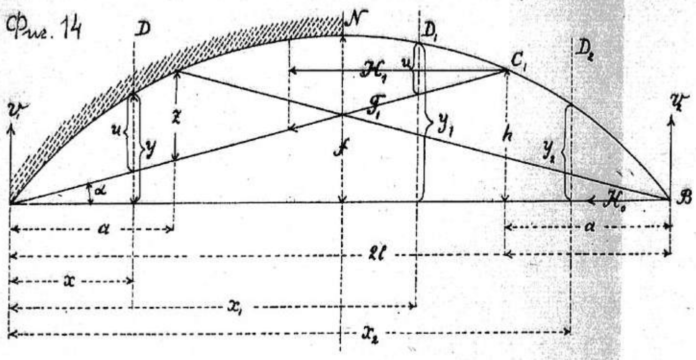



Фиг. 7

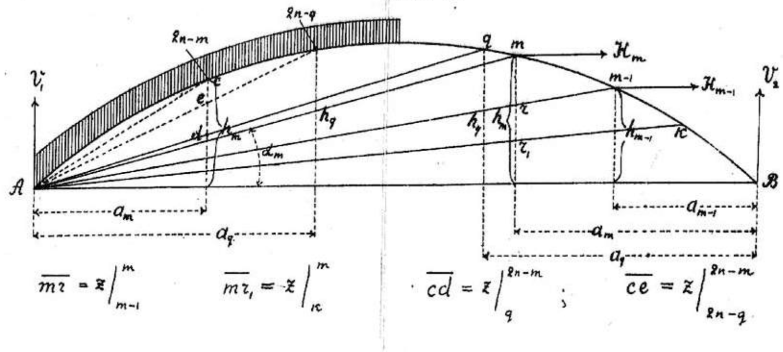


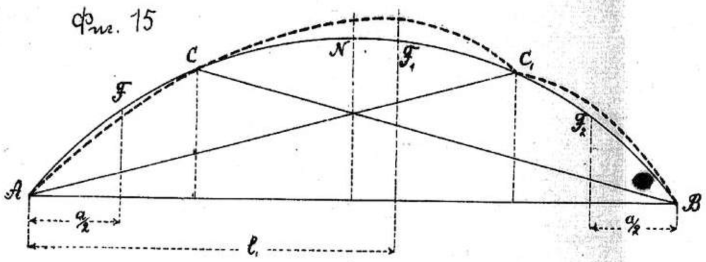
Фиг. 14



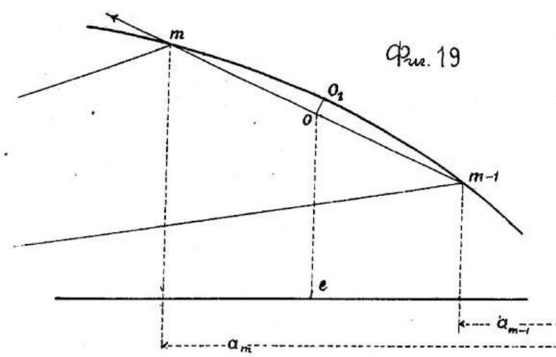
Фиг. 18




Фиг. 15



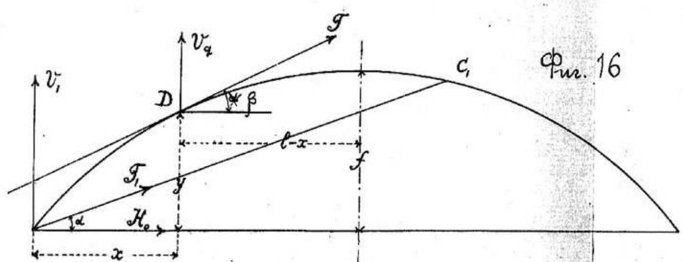
Фиг. 19



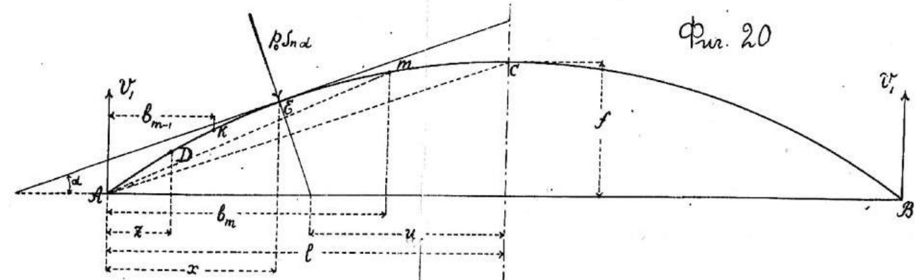
# В. Г. Шуховъ — Стропила.

## Таблица 2ая, Фиг. 14–21.

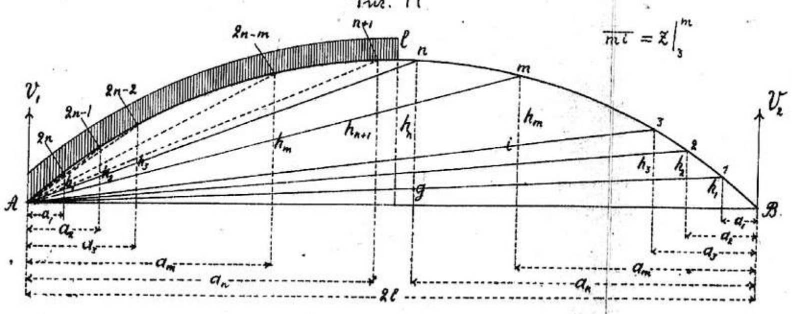
Фиг. 16



Фиг. 20



Фиг. 17




Фиг. 21